Vorwort: Die folgenden Ausführungen befassen sich mit einem mathematischen Thema, das aber nicht wie im Mathe-Buch, sondern verständlich erläutert vorgestellt wird. Da der Verfasser aus der Elektrotechnik kommt, hat er zum Teil andere Sichtweisen auf die Dinge. Vielleicht hilft gerade diese Besonderheit beim Verständnis der beschriebenen Mathematik.

Achtung: Trotz aller Sorgfalt bei der Erarbeitung kann keine Garantie für die Richtigkeit der Inhalte übernommen werden.

Eine Bemerkung zuvor: Also die Analysis ist schon eine recht komplexe Angelegenheit. Es gibt aber zum Beispiel für die Untersuchung von Funktionen und ihren Graphen bestimmte Vorgehensweisen, die sich immer wiederholen. Das kann man gut einüben. Hier in der Soforthilfe habe ich die Theorie bis zu den sogenannten Rotationskörpern geführt, mit denen sich die Leistungskurse beschäftigen.

Inhaltsübersicht Analysis

Merkmale von Funktionen

Funktionsgleichung

$y = f(x)$ Formel, mit deren Hilfe man ausrechnet, welche y-Werte zu welchen x-Werten gehören

Definitionsbereich

Zahlenbereich, den die Variable x nicht verlassen darf.
Wenn zum Beispiel eine Funktion nur im Bereich $0 \leq x \leq 5$ definiert ist, existiert sie nur von $x = 0$ bis $x = 5$. Unter- und oberhalb dieser Werte für x darf man im Diagramm keinen Kurvenverlauf zeichnen.

Wertebereich

Zahlenbereich, den die Variable y beansprucht.
Die Größe des Wertebereiches ist abhängig von der jeweiligen Funktionsgleichung.

Beschränktheit und Schranken

Der Wertebereich übersteigt eine obere Schranke nicht (Funktion ist nach oben beschränkt) oder unterschreitet eine untere Schranke nicht (Funktion ist nach unten beschränkt). Kann die Funktion beliebig große und kleine Funktionswerte annehmen, heißt sie unbeschränkt.

Wertetabelle

Tabellarische Darstellung der Funktionswerte = y-Werte (zweite Zeile) unter den zugehörigen x-Werten (erste Zeile), aus denen sie berechnet wurden:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$										

Graph

Graphische Darstellung der Funktion im x-y-Diagramm – als Graph bezeichnet man die so für $y = f(x)$ entstehende Kurve.

Schnittpunkte mit Koordinatenachsen

Schnittpunkte mit x-Achse (Nullstellen)
$f(x_0) = 0$ setzen und die zugehörigen $x_0 = S_x$ bestimmen. Die Ergebnisse sind die Stellen bzw. x-Werte, an denen die Kurve die x-Achse schneidet. (Schnitt-)Punkte mit der x-Achse gibt man an in der Form

$$S(S_x|S_y) = S(S_x|0)$$

Schnittpunkte mit y-Achse
$f(0)$ ausrechnen, d. h. für x einfach Null einsetzen, und somit $f(0) = S_y$ bestimmen. Das Ergebnis ist der Funktionswert = y-Wert, bei dem die Kurve die y-Achse schneidet. (Schnitt-)Punkte mit der y-Achse gibt man an in der Form

$S(S_x|S_y) = S(0|S_y)$

Symmetrie

Achsensymmetrie zur y-Achse liegt vor bzw. ein Kurvenverlauf ist axialsymmetrisch zur y-Achse, wenn gilt:

$f(x) = f(-x)$

$f(x)$ ist dann eine gerade Funktion.

Punktsymmetrie zum Koordinatenursprung liegt vor, wenn gilt:

$f(x) = -f(-x)$

$f(x)$ ist dann eine ungerade Funktion.

Stetigkeit und Unstetigkeit

Stetigkeit

Eine Funktion ist an der Stelle x_S stetig, wenn:
a) die Funktion für x_S und Umgebung definiert ist und
b) der Grenzwert $\lim_{x \to x_S} f(x)$ existiert und
c) $f(x_S) = \lim_{x \to x_S} f(x)$.
Je kleiner der Abstand von x bis x_S ist, desto kleiner wird auch die Differenz $f(x) - f(x_S)$.

Polstelle

Eine Funktion ist an der Polstelle x_P nicht definiert d. h. unstetig. Sie kann an der Polstelle nicht berechnet werden. Der Sachverhalt entsteht zum Beispiel bei gebrochen rationalen Funktionen (Funktionsgleichung besteht aus einem Bruch mit Zähler und Nenner), bei denen sich für den Nenner an der Polstelle Null ergibt, während der Zähler von Null verschieden ist (Division durch Null nicht möglich).

Polgerade:

Senkrechte Gerade $x = x_P$ durch den Pol an der Stelle x_P

Lücke:

Eine Funktion ist an der Stelle $\boldsymbol{x_L}$ nicht definiert d. h. unstetig, kann aber unmittelbar davor und unmittelbar danach berechnet werden. Der Sachverhalt entsteht zum Beispiel bei gebrochen rationalen Funktionen (Funktionsgleichung besteht aus einem Bruch mit Zähler und Nenner), bei denen sich für Zähler und Nenner an der Lücke Null ergibt (Division Null durch Null unbestimmt bzw. nicht möglich).

hebbare Lücke:

Zum Beispiel kann der Linearfaktor $(x - x_L)$ – das ist der Faktor, der die Lücke erst verursacht – aus Zähler und Nenner der Funktionsgleichung ausgeklammert werden. Dann kann man die gebrochen rationale Funktion durch den Linearfaktor $(x - x_L)$ kürzen. Damit fällt er in Zähler und Nenner weg, sodass die Lückenproblematik nicht mehr besteht. Trotzdem bleibt die Ausgangsfunktion an der Lücke undefiniert.

nicht hebbare Lücke

Es existieren keine mathematischen Möglichkeiten zur exakten Berechnung des Funktionswertes an der Lücke.

Sprung — Eine Funktion springt an der Stelle x_S, d. h. sie ist dort unstetig, wobei sie von links kommend ($x < x_S$) einen anderen Funktionswert besitzt, als wenn man sich dem Sprung von rechts nähert ($x_S < x$). Das gilt zum Beispiel für die Sprungfunktion $y = f(x) = s(x)$ und auch für die Vorzeichenfunktion $y = f(x) = sign(x)$. Linksseitiger und rechtsseitiger Grenzwert sind jeweils verschieden.

Verhalten im Unendlichen (Asymptote)

Asymptote — Gerade, der sich der Kurvenverlauf nähert, wenn $x \to +\infty$ oder $x \to -\infty$ strebt. Der Graph nähert sich der Asymptote unendlich weit an, ohne sie jemals zu erreichen. Der Verlauf der Asymptoten – sofern eine solche existiert – lässt sich berechnen. Zum Beispiel nähert sich die Funktion $y = f(x) = e^{-x}$ für $x \to +\infty$ an die Asymptote $y = 0$ an.

Anstieg

Gibt an, wie groß die Steigung oder das Gefälle einer Funktion an einer bestimmten Stelle ist. Der Anstieg m errechnet sich durch:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

oder

$$m = \frac{dy}{dx}$$

Erster Ausdruck ist der Differenzenquotient, der angibt, welches Maß Δy die Kurve im Verlaufe von Δx steigt oder fällt. Lässt man Δx gegen Null gehen, verwandelt sich der Differenzenquotient in den Differenzialquotienten – das ist der zweite Ausdruck (vgl. Differenzialrechnung). Es gilt außerdem für den Anstieg m einer Funktion:

$$m = \tan(\alpha)$$

mit α als Anstiegswinkel. Im Umkehrschluss ergibt sich:

$$\alpha = \arctan(m)$$

Monotonie

streng monoton steigend — Eine Funktion $f(x)$ steigt im betrachteten Intervall ununterbrochen an. Es gilt $f(x_1) < f(x_2)$ für $x_1 < x_2$. Das heißt weiter rechts liegende Punkte auf der Kurve liegen höher als Punkte links davon. Oder man betrachtet den Anstieg als erste Ableitung der Funktion $f(x)$. Streng monoton steigend ist dann gegeben, wenn $f'(x) > 0$ für alle x im betrachteten Intervall gilt.

monoton steigend — Eine Funktion $f(x)$ fällt im betrachteten Intervall nie, kann aber Bereiche ohne Anstieg bzw. mit Anstieg gleich Null haben. Dann gilt $f(x_1) \leq f(x_2)$ für $x_1 < x_2$ bzw. $f'(x) \geq 0$ für alle x im betrachteten Intervall. In Bereichen mit Anstieg gleich Null verläuft die Kurve parallel zur x-Achse. Das passiert zum Beispiel an allen lokalen Extremwerten – also an Maxima und an Minima. Denn für die gilt bekanntlich die Bedingung $f'(x) = 0$.

streng monoton fallend	Eine Funktion $f(x)$ fällt im betrachteten Intervall ununterbrochen ab. Es gilt $f(x_1) > f(x_2)$ für $x_1 < x_2$. Das heißt weiter rechts liegende Punkte auf der Kurve liegen tiefer als Punkte links davon. Oder man betrachtet den Anstieg als erste Ableitung der Funktion $f(x)$. Streng monoton steigend ist dann gegeben, wenn $f'(x) < 0$ für alle x im betrachteten Intervall gilt.
monoton fallend	Eine Funktion $f(x)$ steigt im betrachteten Intervall nie, kann aber Bereiche ohne Anstieg bzw. mit Anstieg gleich Null haben. Dann gilt $f(x_1) \geq f(x_2)$ für $x_1 < x_2$ bzw. $f'(x) \leq 0$ für alle x im betrachteten Intervall. In Bereichen mit Anstieg gleich Null verläuft die Kurve parallel zur x-Achse. Das passiert zum Beispiel an allen lokalen Extremwerten – also an Maxima und an Minima. Denn für die gilt bekanntlich die Bedingung $f'(x) = 0$.

Extremwerte

$f(x_E)$ heißt lokales Maximum der Funktion, wenn in der Umgebung alle Werte für $f(x)$ kleiner als $f(x_E)$ sind.

$f(x_E)$ heißt lokales Minimum der Funktion,wenn in der Umgebung alle Werte von $f(x)$ größer als $f(x_E)$ sind.

Die Tangente in Extrempunkten der Funktion ist immer waagerecht, d. h. parallel zur x-Achse. Sie hat damit den Anstieg Null (Suchkriterium lokaler Extremwerte durch Gleichsetzen der ersten Ableitung der Funktion mit Null und Berechnung der zugehörigen x-Werte).

Durchläuft eine Funktion ein Minimum, nimmt ihr Anstieg dabei kontinuierlich zu (Gefälle der Kurve verringert sich bis auf Null, ehe Steigung beginnt und weiter zunimmt), der Anstieg des Anstiegs der Kurve = zweite Ableitung ist deshalb bei einem Minimum immer positiv.

Durchläuft eine Funktion ein Maximum, nimmt ihr Anstieg dabei kontinuierlich ab (Steigung der Kurve verringert sich bis auf Null, ehe Gefälle beginnt), der Anstieg des Anstiegs der Kurve = zweite Ableitung ist deshalb bei einem Maximum immer negativ.

Sollte die zweite Ableitung in einem scheinbaren Extrempunkt einmal Null sein, handelt es sich entweder
a) trotzdem um einen Extrempunkt (am Graphen erkennbar) oder
b) nicht um einen Extremwert (Kurve durchläuft eine waagerechte Stelle mit Anstieg gleich Null. Wenn sie vorher schon gestiegen ist, steigt sie aber nach dieser Stelle weiter an bzw. wenn sie vorher schon gefallen ist, fällt sie nach dieser Stelle weiter ab – auch am Graphen erkennbar.)

Wendepunkte

Punkt x_W, an dem die Funktion $f(x)$ ihr Krümmungsverhalten ändert. So etwas passiert unter anderem zwischen lokalen Extrema unterschiedlicher Art – zum Beispiel einem Maximum und einem Minimum. Das Maximum erfordert mit zunehmendem x eine Rechtskurve, da der Graph den Maximalwert erreichen und danach wieder fallen soll – das geht nur mit einer Rechtsorientierung. Nähert sich der Graph nun mit zunehmendem x einem Minimum an, kann er das Minimum und den darauffolgenden Anstieg – sonst wäre es kein Minimum – nur realisieren, wenn er eine Linkskurve durchläuft.

Man kann diesen Sachverhalt aber auch anders interpretieren:

Rechtskrümmung, dann Linkskrümmung	Anstieg durchläuft an dieser Stelle ein lokales Minimum, d. h. Anstieg des Anstiegs = zweite Ableitung muss an dieser Stelle Null (notwendige Bedingung für einen Wendepunkt)

	und die dritte Ableitung wegen des Minimums größer Null (hinreichende Bedingung für einen Wendepunkt) sein. Die Rechtskrümmung bedingt eine Abnahme des Anstiegs, ehe die Linkskrümmung wieder zu einer Vergrößerung der Steilheit führt.
Linkskrümmung, dann Rechtskrümmung	Anstieg durchläuft an dieser Stelle ein lokales Maximum, d. h. Anstieg des Anstiegs = zweite Ableitung muss an dieser Stelle auch Null (notwendige Bedingung für Wendepunkt) und die dritte Ableitung wegen des Maximums kleiner Null (hinreichende Bedingung für einen Wendepunkt) sein. Die Linkskrümmung bedingt eine Zunahme des Anstiegs, ehe die Rechtskrümmung wieder zu einer Verringerung der Steilheit führt. Ist die dritte Ableitung gleich Null (hinreichende Bedingung für einen Wendepunkt nicht erfüllt), hat der Anstieg des Ausgangsgraphen = erste Ableitung im in Frage kommenden Bereich einen konstanten Wert. Das erzeugt im Anstieg des Anstiegs = zweite Ableitung an dieser Stelle zwar eine Null (notwendige Bedingung für einen Wendepunkt), aber es handelt sich dann nicht um ein Maximum oder Minimum im Anstieg des Ausgangsgraphen und somit auch nicht um einen Wendepunkt. Eine Funktion, bei der das der Fall ist, durchläuft zum Beispiel eine Rechtskurve, mündet danach in ein Stück geradlinigen, linearen Verlauf (Anstieg = erste Ableitung = konstant und damit Anstieg des Anstiegs = zweite Ableitung = Null und davon die Ableitung = dritte Ableitung ergibt nochmals Null) ehe der Graph der Funktion wieder in eine weitere Rechtskurve übergeht.

Wem das Nachvollziehen dieser Zusammenhänge schwerfällt, der nehme sich seinen graphischen Taschenrechner und tippe als erste Funktion zum Beispiel eine Funktion dritten Grades (mit Extrema und Wendepunkt/en), als zweite Funktion die zugehörige erste Ableitung, als dritte Funktion die zugehörige zweite Ableitung und als vierte Funktion die zugehörige dritte Ableitung ein. Dann lassen Sie sich alle vier Funktionen anzeigen und studieren noch einmal am praktischen Objekt die dargelegte Theorie. Sicher denken Sie daran, dass eine Änderung an der Ausgangsfunktion auch Korrekturen an den Ableitungen bedingen kann.

Umkehrfunktion

Eine Funktion $y = f(x)$ heißt umkehrbar, wenn es zu jedem y aus dem Wertebereich nur ein x im Definitionsbereich mit $f(x) = y$ gibt. Die Umkehrfunktion von $f(x)$ wird mit $\overline{f}(x)$ bezeichnet (gesprochen f quer). Umkehrbar sind streng monotone Funktionen, da dann jeder Funktionswert y nur einmal vorkommt. Andernfalls – zum Beispiel bei einer Parabel $y = x^2$, bei der alle Funktionswerte doppelt vorkommen – ist es nicht eindeutig, auf welchem Teil der Funktionskurve man sich gerade befindet.

Beziehungen des Graphen von Funktionen mit anderen grafischen Objekten

Sekante

Eine Gerade, die den Graphen einer Funktion $y = f(x)$ in zwei Punkten schneidet. Schiebt man einen der beiden Punkte zum anderen Punkt, verwandelt sich die Sekante in eine Tangente, da sie den Graphen dann nur noch in diesem einen Punkt berührt.

Normale

Eine Gerade, die den Graphen einer Funktion $y = f(x)$ in einem Punkt $P(x_0|f(x_0))$ senkrecht schneidet. Für die Normale gilt:

$$n(x) = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

Der Ausdruck $-\frac{1}{f'(x_0)}$ sorgt für den richtigen Anstieg der Normalen – gegenüber der geschnittenen Ausgangsfunktion um 90° gedreht. Mit $(x - x_0)$ bewegt man sich in Abhängigkeit von x auf der Normalen quasi hin und her. Und die Größe von $f(x_0)$ bewirkt, dass die Normale mit der obigen Gleichung die geschnittene Ausgangsfunktion genau im Punkt x_0 schneidet.

Tangente an den Graphen einer Funktion

Eine Gerade, die den Graphen einer Funktion $y = f(x)$ im Punkt $P(x_P|f(x_P))$ berührt, heißt Tangente t. Es gilt:

$$t(x) = m \cdot x + n = f'(x_P) \cdot x + y_P = f'(x_P) \cdot x + f(x_P)$$

mit $m = f'(x_P)$ als Anstieg der Funktion $f(x)$ im Punkt P und $n = y_P = f(x_P)$ als Ordinate = y-Wert der Funktion im Punkt P.

Schnittpunkte des Graphen einer Funktion mit einer Geraden

Die x-Koordinaten von Schnittpunkten des Graphen einer Funktion $y = f(x)$ und einer Geraden $g(x)$ errechnen sich über das Gleichsetzen der Formeln für $f(x)$ und $g(x)$:

$$f(x_S) = g(x_S)$$

Anschließend können die y-Koordinaten über

$$y_S = f(x_S) = g(x_S)$$

errechnet werden. $f(x_S)$ und $g(x_S)$ müssen den gleichen Wert ergeben, sonst kann es sich an der Stelle x_S um keinen Schnittpunkt handeln (Funktion und Gerade hätten unterschiedliche y-Werte).

Schnittpunkte der Graphen zweier Funktionen

Die x-Koordinaten von Schnittpunkten der Graphen einer Funktion $f_1(x)$ und einer Funktion $f_2(x)$ errechnen sich über das Gleichsetzen der Formeln für $f_1(x)$ und $f_2(x)$:

$f_1(x_S) = f_2(x_S)$

Anschließend können die y-Koordinaten des Schnittpunktes über

$y_S = f_1(x_S) = f_2(x_S)$

errechnet werden. Auch $f_1(x_S)$ und $f_2(x_S)$ müssen gleiche Werte ergeben, sonst kann es sich an der Stelle x_S um keinen Schnittpunkt handeln (die Funktionen hätten unterschiedliche y-Werte).

Fläche zwischen dem Graphen einer Funktion und der x-Achse

Die Fläche zwischen dem Graphen der Funktion $y = f(x)$ und der x-Achse zwischen den Punkten x_A und x_B berechnet sich über:

$$A = \left| \int_{x_A}^{x_B} f(x)dx \right|$$

mit der Fläche A in Flächeneinheiten FE.

Achtung: Liegt der Graph oberhalb der x-Achse, ergeben sich für das Integral positive Ergebnisse. Negative Ergebnisse entstehen, wenn der Graph dagegen unterhalb der x-Achse verläuft – deshalb die Betragsbildung.

Schneidet der Graph von $f(x)$ die x-Achse (unter Umständen mehrfach), muss das Integral von x_A bis x_B für jeden Abschnitt des Graphen zwischen den Schnittpunkten mit der x-Achse einzeln berechnet werden, sonst heben sich positive und negative Flächenanteile gegenseitig auf, was für den Flächeninhalt ein falsches Ergebnis liefert. Die Beträge aller Flächenanteile addieren sich.

Fläche zwischen den Graphen zweier Funktionen

Die Fläche zwischen den Graphen zweier Funktionen $f_1(x)$ und $f_2(x)$ zwischen den Punkten x_A und x_B berechnet sich über:

$$A = \left| \int_{x_A}^{x_B} [f_1(x) - f_2(x)\ ]dx \right| = \left| \int_{x_A}^{x_B} f_1(x)dx - \int_{x_A}^{x_B} f_2(x)dx \right|$$

mit der Fläche A in Flächeneinheiten FE.

Achtung: Liegt der Graph von $f_1(x)$ vollständig oberhalb des Graphen von $f_2(x)$, ergeben sich bei der Integration positive Ergebnisse. Negative Ergebnisse entstehen, wenn der Graph $f_1(x)$ dagegen unterhalb des Graphen von $f_2(x)$ verläuft – deshalb die Betragsbildung.

Schneiden sich die Graphen von $f_1(x)$ und $f_2(x)$ (unter Umständen mehrfach), muss das Integral von x_A bis x_B für jeden Abschnitt der Graphen zwischen den Schnittpunkten von $f_1(x)$ und $f_2(x)$ einzeln berechnet werden, sonst heben sich positive und negative Flächenanteile gegenseitig auf, was für den Flächeninhalt ein falsches Ergebnis liefert. Die Beträge aller Flächenanteile addieren sich.

Volumen des Rotationskörpers des Graphen einer Funktion bei seiner Rotation um die x-Achse

Ausgangspunkt ist die Fläche eines Kreises:

$A_{Kreis} = \pi \cdot r^2$

Bei der Volumenberechnung von Rotationskörpern um die x-Achse werden quasi hauchdünne Kreis-<u>scheiben</u> der Dicke dx auf die x-Achse aufgefädelt, deren Radius r von $y = r = f(x)$ gebildet wird.

Das Gesamtvolumen aller Kreisscheiben entspricht dem Volumen des gesuchten Rotationskörpers. Man muss also per Integral den Rauminhalt aller Kreisscheiben summieren. Volumen einer einzelnen Kreisscheibe:

$$dV = A_{Kreis} \cdot dx = \pi \cdot r^2 \cdot dx = \pi \cdot f^2(x) \cdot dx$$

Volumen des gesamten Rotationskörpers zwischen den Punkten x_A und x_B:

$$V = \int_{x_A}^{x_B} \pi \cdot f^2(x) \cdot dx = \pi \cdot \int_{x_A}^{x_B} f^2(x) \cdot dx$$

mit dem Volumen V in Volumeneinheiten. Die Punkte x_A und x_B bestimmen die untere/linke und obere/rechte Begrenzung des Rotationskörpers.

Schneidet der Graph von $f(x)$ die x-Achse (unter Umständen mehrfach), muss das Integral von x_A bis x_B für jeden Abschnitt des Graphen zwischen den Schnittpunkten mit der x-Achse einzeln berechnet werden, sonst heben sich positive und negative Volumenanteile gegenseitig auf, was für den Volumeninhalt ein falsches Ergebnis liefert. Die Beträge aller Volumenanteile addieren sich.

Volumen des Rotationskörpers zwischen den Graphen zweier Funktionen bei ihrer Rotation um die x-Achse

Ausgangspunkt ist die Fläche eines Kreisrings:

$$A_{Kreisring} = \pi \cdot r_{außen}^2 - \pi \cdot r_{innen}^2 = \pi \cdot (r_{außen}^2 - r_{innen}^2)$$

$r_{außen}$ gibt den Außen- und r_{innen} den Innenradius des Kreisrings an.

Bei der Volumenberechnung von Rotationskörpern zwischen den Graphen zweier Funktionen $f_1(x)$ und $f_2(x)$ und Rotation um die x-Achse werden quasi hauchdünne Kreis<u>ringe</u> der Dicke dx auf die x-Achse aufgefädelt, deren Außenradius $r_{außen}$ vom Graphen der einen Funktion und deren Innenradius r_{innen} vom Graphen der anderen Funktion gebildet wird. Welche Funktion bei den Kreisringen gerade außen und welche Funktion gerade innen liegt, hängt von den Funktionswerten der beiden Funktionen ab.

Wenn die Funktion $f_1(x)$ im betrachteten Bereich an allen Stellen größere Funktionswerte als die Funktion $f_2(x)$ aufweist, kann man einfach wie folgt rechnen. Volumen eines einzelnen Kreisrings:

$$dV = A_{Kreisring} \cdot dx = \pi \cdot (r_{außen}^2 - r_{innen}^2) \cdot dx = \pi \cdot [f_1^2(x) - f_2^2(x)] \cdot dx$$

Das Gesamtvolumen aller Kreisringe entspricht dem Volumen des gesuchten Rotationskörpers. Man muss also per Integral den Rauminhalt aller Kreisringe summieren. Volumen des gesamten Rotationskörpers zwischen den Punkten x_A und x_B:

$$V = \int_{x_A}^{x_B} \pi \cdot [f_1^2(x) - f_2^2(x)] \cdot dx = \pi \cdot \int_{x_A}^{x_B} [f_1^2(x) - f_2^2(x)] \cdot dx$$

$$V = \pi \cdot \int_{x_A}^{x_B} f_1^2(x) \cdot dx - \pi \cdot \int_{x_A}^{x_B} f_2^2(x) \cdot dx$$

mit dem Volumen V in Volumeneinheiten. Die Punkte x_A und x_B bestimmen die untere/linke und obere/rechte Begrenzung des Rotationskörpers.

Wenn die Funktion $f_1(x)$ im betrachteten Bereich an allen Stellen kleinere Funktionswerte als die Funktion $f_2(x)$ aufweist, ergibt sich für die Fläche ein negativer Wert, von dem man abschließend den Betrag bilden muss.

Schneiden sich die Graphen der Funktionen $f_1(x)$ und $f_2(x)$ im betrachteten Bereich (unter Umständen mehrfach), muss das Integral von x_A bis x_B für jeden Abschnitt der Graphen zwischen den Schnittpunkten von $f_1(x)$ und $f_2(x)$ einzeln berechnet werden, sonst heben sich positive und negative Volumenanteile gegenseitig auf, was für den Volumeninhalt ein falsches Ergebnis liefert. Die Beträge aller Volumenanteile addieren sich.

Volumen des Rotationskörpers des Graphen einer Funktion bei seiner Rotation um die y-Achse

Ausgangspunkt ist die Funktionsgleichung in der Form $y = f(x)$. Vor Beginn der Rechnung muss sie in die Form $x = f(y)$ gebracht werden. Denn wenn der Graph um die y-Achse rotieren soll, muss man ja wissen, welchen x-Abstand der Graph an welcher Stelle zur y-Achse hat. Dieser x-Abstand entspricht dem Radius des Rotationskörpers, der bei Rotation um die y-Achse entsteht.

In der Regel muss es sich also hier bei der Funktion $y = f(x)$ um eine umkehrbare Funktion handeln, damit es zu jedem y aus dem Wertebereich nur ein x im Definitionsbereich gibt. Umkehrbar sind streng monotone Funktionen, da dann jeder Funktionswert y nur einmal vorkommt. Oder aber es handelt sich um eine achsensymmetrische Funktion zur y-Achse – zum Beispiel eine Parabel $y = x^2$, bei der alle Funktionswerte doppelt vorkommen. Für die Rotation um die y-Achse muss man dann nur den Teil des Graphen für $0 \leq x \leq \infty$ berücksichtigten.

Für die Fläche eines Kreises gilt erneut:

$$A_{Kreis} = \pi \cdot r^2$$

Bei der Volumenberechnung von Rotationskörpern um die y-Achse werden quasi hauchdünne Kreisscheiben der Dicke dy auf die y-Achse aufgefädelt, deren Radius r von $x = f(y)$ gebildet wird: $x = r = f(y)$. Das Gesamtvolumen aller Kreisscheiben entspricht dem Volumen des gesuchten Rotationskörpers. Man muss also per Integral den Rauminhalt aller Kreisscheiben summieren.

Volumen einer einzelnen Kreisscheibe:

$$dV = A_{Kreis} \cdot dy = \pi \cdot r^2 \cdot dy = \pi \cdot f^2(y) \cdot dy$$

Volumen des gesamten Rotationskörpers:

$$V = \int_{y_A}^{y_B} \pi \cdot f^2(y) \cdot dy = \pi \cdot \int_{y_A}^{y_B} f^2(y) \cdot dy$$

mit dem Volumen V in Volumeneinheiten. Die Punkte y_A und y_B bestimmen die untere und obere Begrenzung des Rotationskörpers.

Volumen des Rotationskörpers zwischen den Graphen zweier Funktionen bei ihrer Rotation um die y-Achse

Ausgangspunkt ist erneut die Fläche eines Kreisrings:

$$A_{Kreisring} = \pi \cdot r_{außen}^2 - \pi \cdot r_{innen}^2 = \pi \cdot (r_{außen}^2 - r_{innen}^2)$$

$r_{außen}$ gibt den Außen- und r_{innen} den Innenradius des Kreisrings an.

Bei der Volumenberechnung von Rotationskörpern zwischen den Graphen zweier Funktionen $f_1(x)$ und $f_2(x)$ und Rotation um die y-Achse werden quasi hauchdünne Kreis<u>ringe</u> der Dicke dy auf die y-Achse aufgefädelt, deren Außenradius $r_{außen}$ vom Graphen der einen Funktion und deren Innenradius r_{innen} vom Graphen der anderen Funktion gebildet wird. Welche Funktion bei den Kreisringen gerade außen und welche Funktion gerade innen liegt, hängt von den x-Werten der beiden Funktionen ab.

Vor Beginn der Rechnung müssen die beiden Funktionen in die Form $x = f(y)$ gebracht werden. Denn wenn der Graph um die y-Achse rotieren soll, muss man ja wissen, welchen x-Abstand die beiden Graphen an welcher Stelle zur y-Achse haben. Diese x-Abstände entsprechen dem Außen- und Innenradius des Rotationskörpers, der bei Rotation um die y-Achse entsteht.

Wenn die Funktion $x = f_1(y)$ im betrachteten Bereich an allen Stellen größere x-Werte als die Funktion $x = f_2(y)$ aufweist, kann man einfach wie folgt rechnen. Volumen eines einzelnen Kreisrings:

$$dV = A_{Kreisring} \cdot dy = \pi \cdot (r_{außen}^2 - r_{innen}^2) \cdot dy = \pi \cdot [f_1^2(y) - f_2^2(y)] \cdot dy$$

Volumen des gesamten Rotationskörpers:

$$V = \int_{y_A}^{y_B} \pi \cdot [f_1^2(y) - f_2^2(y)] \cdot dy = \pi \cdot \int_{y_A}^{y_B} [f_1^2(y) - f_2^2(y)] \cdot dy$$
$$V = \pi \cdot \int_{y_A}^{y_B} f_1^2(y) \cdot dy - \pi \cdot \int_{y_A}^{y_B} f_2^2(y) \cdot dy$$

mit dem Volumen V in Volumeneinheiten. Die Punkte y_A und y_B bestimmen die untere und obere Begrenzung des Rotationskörpers.

Wenn die Funktion $x = f_1(y)$ im betrachteten Bereich an allen Stellen kleinere x-Werte als die Funktion $x = f_2(y)$ aufweist, ergibt sich für die Fläche ein negativer Wert, von dem man abschließend den Betrag bilden muss.

Schneiden sich die Graphen der Funktionen $x = f_1(y)$ und $x = f_2(y)$ im betrachteten Bereich (unter Umständen mehrfach), muss das Integral von y_A bis y_B für jeden Abschnitt der Graphen zwischen den Schnittpunkten von $x = f_1(y)$ und $x = f_2(y)$ einzeln berechnet werden, sonst heben sich positive und negative Volumenanteile gegenseitig auf, was für den Volumeninhalt ein falsches Ergebnis liefert. Die Beträge aller Volumenanteile addieren sich.