

Vorwort: Die folgenden Ausführungen befassen sich mit einem mathematischen Thema, das aber nicht wie im Mathe-Buch, sondern verständlich erläutert vorgestellt wird. Da der Verfasser aus der Elektrotechnik kommt, hat er zum Teil andere Sichtweisen auf die Dinge. Vielleicht hilft gerade diese Besonderheit beim Verständnis der beschriebenen Mathematik.

Achtung: Trotz aller Sorgfalt bei der Erarbeitung kann keine Garantie für die Richtigkeit der Inhalte übernommen werden.

Eine Bemerkung zuvor: Eigentlich war dieser Teil der Mathe-Soforthilfe zunächst nicht geplant. Aber Gymnasiasten bis hoch zum Leistungskurs stocken bei der Aufgabenbearbeitung immer wieder, wenn es um die Behandlung von Brüchen geht. Also habe ich mal die wesentlichen Regeln zusammengestellt.

Inhaltsübersicht Bruchrechnung

Rechnen mit Brüchen	2
Grundaufbau eines Bruches	2
Echter und unechter Bruch	2
Reziproker Bruch	2
Erweitern eines Bruches	2
Kleinstes gemeinsames Vielfaches (kgV)	2
Kürzen eines Bruches	2
Gleichnamige Brüche	3
Ungleichnamige Brüche	3
Ungleichnamige Brüche gleichnamig machen	3
Addition gleichnamiger Brüche	3
Subtraktion gleichnamiger Brüche	4
Addition ungleichnamiger Brüche	4
Subtraktion ungleichnamiger Brüche	4
Addition eines Bruches zu einer Zahl	4
Subtraktion eines Bruches von einer Zahl	5
Subtraktion einer Zahl von einem Bruch	5
Multiplikation von Brüchen	6
Division von Brüchen	6
Multiplikation eines Bruches mit einer Zahl	6
Division eines Bruches durch eine Zahl	6
Division einer Zahl durch einen Bruch	7

Rechnen mit Brüchen

Grundaufbau eines Bruches

$$\frac{\text{Zähler}}{\text{Nenner}} = \frac{a}{b}$$

Echter und unechter Bruch

Bei einem echten Bruch ist der Zähler kleiner als der Nenner. Ist dies nicht der Fall, handelt es sich um einen unechten Bruch.

Reziproker Bruch

Ein reziproker Bruch entsteht bzw. das reziproke oder der Kehrwert eines Bruches wird berechnet, indem man Zähler und Nenner austauscht. Aus

$$\frac{a}{b}$$

wird ganz einfach:

$$\frac{b}{a}$$

wobei auch gilt:

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{\frac{b}{a}}$$

Erweitern eines Bruches

Ein Bruch wird erweitert, indem man Zähler und Nenner mit der gleichen Zahl multipliziert. Der Wert des Bruches ändert sich dabei nicht, da das Verhältnis von Zähler und Nenner unverändert bleibt. Meist erweitert man, um im Nenner eine bestimmte Zahl zu erzeugen (Brüche gleichnamig machen).

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c}$$

Kleinstes gemeinsames Vielfaches (kgV)

Das kleinste gemeinsame Vielfache zweier Zahlen a und b ist die kleinste Zahl, deren Division sowohl durch die Zahl a als auch durch die Zahl b ein ganzzahliges Ergebnis liefert. Gesucht wird das kleinste gemeinsame Vielfache in der Regel beim gleichnamig Machen von Brüchen, damit der gemeinsame Nenner nur die unbedingt erforderliche Größe annimmt. Als gemeinsamer Nenner kann auch das Produkt der Zahlen a und b verwendet werden, das sich unter Umständen aber erheblich vom kleinsten gemeinsamen Vielfachen unterscheidet und somit eventuell nachfolgende Rechnungen unnötig erschwert.

Kürzen eines Bruches

Ein Bruch wird gekürzt, indem man Zähler und Nenner durch die gleiche Zahl dividiert, wobei die Divisionsergebnisse für Zähler und Nenner in der Regel ganzzahlig sein sollen. Der Wert des Bruches ändert sich dabei nicht, da das Verhältnis von Zähler und Nenner unverändert bleibt. Meist kürzt man, um im Nenner eine bestimmte Zahl zu erzeugen (Brüche gleichnamig machen).

$$\frac{a}{b} = \frac{a/c}{b/c}$$

Wenn es möglich ist, sollte man Brüche immer kürzen, weil

- a) dadurch die weitere Rechnung erleichtert werden kann oder
- b) ein berechnetes Ergebnis bekanntlich noch nicht die volle Punktzahl erhält, solange es noch vereinfacht werden kann.

Gleichnamige Brüche

Zwei Brüche heißen gleichnamig, wenn die Nenner beider Brüche den gleichen Wert haben.

Ungleichnamige Brüche

Zwei Brüche heißen ungleichnamig, wenn die Nenner beider Brüche unterschiedliche Werte haben.

Ungleichnamige Brüche gleichnamig machen

Der einfachste Weg, zwei ungleichnamige Brüche gleichnamig zu machen, ist die Erweiterung der Brüche mit dem Nenner des jeweils anderen Bruches:

Ausgangssituation:

$$\frac{a}{c}$$

und

$$\frac{b}{d}$$

Gleichnamig machen, indem man mit dem Nenner des jeweils anderen Bruches erweitert:

$$\frac{a}{c} = \frac{a \cdot d}{c \cdot d}$$

und

$$\frac{b}{d} = \frac{b \cdot c}{d \cdot c}$$

Damit haben jetzt beide Brüche den gleichen Nenner $c \cdot d$ und sind gleichnamig.

Addition gleichnamiger Brüche

Gleichnamige Brüche – das heißt die Nenner sind identisch – werden addiert, indem man die Zähler addiert und den einen = gemeinsamen Nenner beibehält.

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a + b}{c}$$

Subtraktion gleichnamiger Brüche

Gleichnamige Brüche – das heißt die Nenner sind identisch – werden subtrahiert, indem man den Zähler des zweiten Bruches vom Zähler des ersten Bruches abzieht und den einen = gemeinsamen Nenner beibehält.

$$\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a - b}{c}$$

Addition ungleichnamiger Brüche

Ungleichnamige Brüche – das heißt die Nenner sind nicht identisch – werden addiert, indem man die Brüche zunächst gleichnamig macht und anschließend die Addition wie bei gleichnamigen Brüchen vornimmt.

Ausgangssituation:

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{d}$$

Gleichnamig machen, indem man mit dem Nenner des jeweils anderen Bruches erweitert:

$$\frac{a \cdot d}{c \cdot d} + \frac{b \cdot c}{d \cdot c}$$

Ausführung Addition:

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{d} = \frac{a \cdot d}{c \cdot d} + \frac{b \cdot c}{d \cdot c} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{c \cdot d}$$

Subtraktion ungleichnamiger Brüche

Ungleichnamige Brüche – das heißt die Nenner sind nicht identisch – werden subtrahiert, indem man die Brüche zunächst gleichnamig macht und anschließend die Subtraktion wie bei gleichnamigen Brüchen vornimmt.

Ausgangssituation:

$$\frac{a}{c} - \frac{b}{d}$$

Gleichnamig machen, indem man mit dem Nenner des jeweils anderen Bruches erweitert:

$$\frac{a \cdot d}{c \cdot d} - \frac{b \cdot c}{d \cdot c}$$

Ausführung Subtraktion:

$$\frac{a}{c} - \frac{b}{d} = \frac{a \cdot d}{c \cdot d} - \frac{b \cdot c}{d \cdot c} = \frac{a \cdot d - b \cdot c}{c \cdot d}$$

Addition eines Bruches zu einer Zahl

Die Addition ist erst möglich, wenn man die Zahl durch Erweitern in einen (unechten) Bruch umgewandelt hat, der den gleichen Nenner besitzt. Anschließend erfolgt die Addition wie bei gleichnamigen Brüchen.

Ausgangssituation:

$$\frac{a}{c} + b$$

Die Zahl durch Erweitern mit dem Nenner des Bruches in einen unechten Bruch mit gleichem Nenner umwandeln:

$$b = \frac{b}{1} = \frac{b \cdot c}{c}$$

Ausführung der Addition:

$$\frac{a}{c} + b = \frac{a}{c} + \frac{b \cdot c}{c} = \frac{a + b \cdot c}{c}$$

Subtraktion eines Bruches von einer Zahl

Die Subtraktion ist ebenfalls erst möglich, wenn man die Zahl durch Erweitern in einen (unechten) Bruch umgewandelt hat, der den gleichen Nenner besitzt. Anschließend erfolgt die Subtraktion wie bei gleichnamigen Brüchen.

Ausgangssituation:

$$a - \frac{b}{c}$$

Die Zahl durch Erweitern mit dem Nenner des Bruches in einen unechten Bruch mit gleichem Nenner umwandeln:

$$a = \frac{a}{1} = \frac{a \cdot c}{c}$$

Ausführung der Subtraktion:

$$a - \frac{b}{c} = \frac{a \cdot c}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a \cdot c - b}{c}$$

Subtraktion einer Zahl von einem Bruch

Die Subtraktion ist ebenfalls erst möglich, wenn man die Zahl durch Erweitern in einen (unechten) Bruch umgewandelt hat, der den gleichen Nenner besitzt. Anschließend erfolgt die Subtraktion wie bei gleichnamigen Brüchen.

Ausgangssituation:

$$\frac{a}{c} - b$$

Die Zahl durch Erweitern mit dem Nenner des Bruches in einen unechten Bruch mit gleichem Nenner umwandeln:

$$b = \frac{b}{1} = \frac{b \cdot c}{c}$$

Ausführung der Subtraktion:

$$\frac{a}{c} - b = \frac{a}{c} - \frac{b \cdot c}{c} = \frac{a - b \cdot c}{c}$$

Multiplikation von Brüchen

Zwei Brüche werden miteinander multipliziert, indem man Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multipliziert.

$$\frac{a}{c} \cdot \frac{b}{d} = \frac{a \cdot b}{c \cdot d}$$

Division von Brüchen

Zwei Brüche werden durcheinander dividiert, indem man den ersten Bruch mit dem reziproken des zweiten Bruches multipliziert.

$$\frac{a}{c} : \frac{b}{d} = \frac{a}{c} \cdot \frac{d}{b} = \frac{a \cdot d}{c \cdot b}$$

Multiplikation eines Bruches mit einer Zahl

Eine Zahl kann immer in einen Bruch mit dem Nenner 1 umgewandelt werden.

Ausgangssituation:

$$\frac{a}{b} \cdot c$$

Umwandlung der Zahl in einen Bruch:

$$c = \frac{c}{1}$$

Alles Weitere entspricht der Multiplikation von Brüchen:

$$\frac{a}{b} \cdot c = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{1} = \frac{a \cdot c}{b}$$

Division eines Bruches durch eine Zahl

Eine Zahl kann immer in einen Bruch mit dem Nenner 1 umgewandelt werden. Dann muss man mit dem reziproken des so gebildeten Bruches multiplizieren – vergleiche Division zweier Brüche:

Ausgangssituation:

$$\frac{a}{b} : c$$

Umwandlung der Zahl in einen Bruch:

$$c = \frac{c}{1}$$

Alles Weitere entspricht der Division von Brüchen:

$$\frac{a}{b} : c = \frac{a}{b} : \frac{c}{1} = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{c} = \frac{a}{b \cdot c}$$

Division einer Zahl durch einen Bruch

Eine Zahl kann immer in einen Bruch mit dem Nenner 1 umgewandelt werden. Dann muss man diesen neuen Bruch mit dem reziproken des schon vorhandenen Bruches multiplizieren – vergleiche Division zweier Brüche:

Ausgangssituation:

$$a : \frac{b}{c}$$

Umwandlung der Zahl in einen Bruch:

$$a = \frac{a}{1}$$

Alles Weitere entspricht der Multiplikation von Brüchen:

$$a : \frac{b}{c} = \frac{a}{1} : \frac{b}{c} = \frac{a}{1} \cdot \frac{c}{b} = \frac{a \cdot c}{b}$$