Vorwort: Die folgenden Ausführungen befassen sich mit einem mathematischen Thema, das aber nicht wie im Mathe-Buch, sondern verständlich erläutert vorgestellt wird. Da der Verfasser aus der Elektrotechnik kommt, hat er zum Teil andere Sichtweisen auf die Dinge. Vielleicht hilft gerade diese Besonderheit beim Verständnis der beschriebenen Mathematik.

Achtung: Trotz aller Sorgfalt bei der Erarbeitung kann keine Garantie für die Richtigkeit der Inhalte übernommen werden.

Eine Bemerkung zuvor: Wer hier jetzt große Theorie erwartet, den muss ich enttäuschen. Denn es geht hier nur um die Differenzialrechnung an sich. Da gibt es nicht viel zu sagen/schreiben. Es gibt die Differenziationsregeln und das ist es dann schon.

Ein anderer Punkt ist, was man mit der Differenzialrechnung alles machen kann. Zum Beispiel in der Analysis bei der Untersuchung von Funktionen. Diese Themen werden aber bei den entsprechenden anderen Soforthilfen ausführlich behandelt. Hier habe ich am Ende nur eine einfache Extremwertaufgabe als Beispiel angefügt.

Inhaltsübersicht Differenzialrechnung

Grundbegriffe der Differenzialrechnung

Ableitung einer Funktion

Gibt an, wie groß die Steigung oder das Gefälle einer Funktion $f(x)$ an einer bestimmten Stelle ist. Errechnet sich entweder durch den Differenzenquotienten

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

der angibt, welches Maß Δy die Kurve im Verlaufe von Δx steigt oder fällt. Macht man Δx immer kleiner, d. h. Δx geht gegen dx, verwandelt sich der Differenzenquotient in den Differenzialquotienten

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

Für den Anstieg m einer Funktion gilt weiterhin:

$$m = \tan\alpha$$

$$\alpha = \arctan m$$

mit α als Anstiegswinkel.

Definition der Ableitung an einer Stelle

1. Die Funktion $f(x)$ besitzt an der Stelle x_0 die Ableitung $f'(x_0)$, wenn der rechts- und der linksseitige Grenzwert der Differenzenquotientenfunktion existieren und einander gleich sind.
   Sprich unmittelbar vor und nach der Stelle x_0 darf die Funktion keinen Sprung, keine Polstelle oder keine andere Unstetigkeit haben.

2. Existiert $f'(x_0)$, so ist die Funktion $f(x)$ an der Stelle x_0 differenzierbar.
   Kann man die erste Ableitung berechnen, ist alles gut. Kann man das aus irgendwelchen Gründen nicht – zum Beispiel bei Division durch Null oder bei einem negativen Wurzelinhalt, ist die Funktion an der betreffenden Stelle nicht differenzierbar.

3. Ist $f(x)$ an der Stelle x_0 differenzierbar, so ist $f'(x_0)$ die Steigung des Graphen der Funktion $f(x)$ im Punkt $P_0(x_0|y_0)$. Das muss sicher nicht weiter erläutert werden.

Differenzierbarkeit und Stetigkeit

Ist $f(x)$ an der Stelle x_0 differenzierbar, so ist $f(x)$ an der Stelle x_0 stetig.
Achtung: Eine an einer Stelle x_0 stetige Funktion muss dort aber nicht unbedingt differenzierbar sein.
Das gilt zum Beispiel für eine gebrochen rationale Funktion, bei der die erste Ableitung an der Stelle x_0 den Ausdruck

$$\frac{0}{0}$$

ergibt.

Ableitungsregeln

Vergleiche Formelsammlung!

Ableitung einer Konstanten
Potenzregel
Faktorregel
Summenregel
Produktregel
Quotientenregel
Kettenregel

Untersuchung von Funktionen mit Hilfe ihrer Ableitungen

Analysis

Berechnung des Anstiegs eines Graphen
Platzierung oder Ermittlung von Tangenten an eine Funktion
Platzierung und Ermittlung von Normalen an eine Funktion
Ermittlung der Schnittwinkel von Objekten
Berechnung von lokalen Extremwerten
Berechnung von Wendepunkten

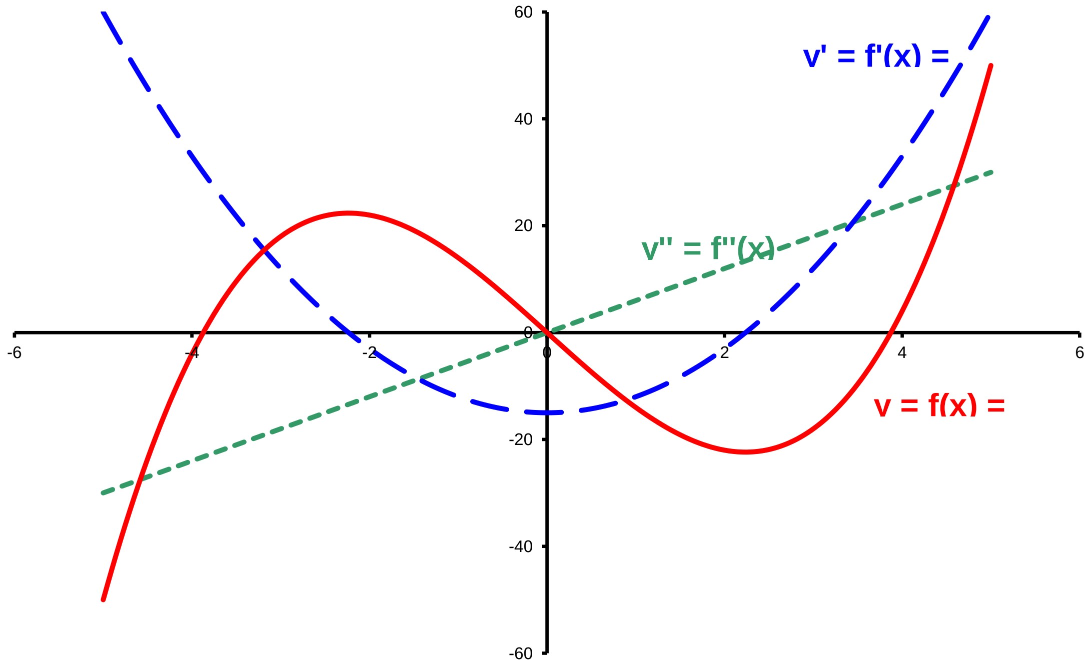
Informationen in der Soforthilfe Analysis!

Graphisches Zusammenspiel einer Funktion mit ihren Ableitungen

Schauen Sie sich das folgende Bild genau an. Die rote Kurve mit

$$y = f(x) = x^3 - 15$$

ist gegeben. Untersuchen Sie die blaue Kurve (erste Ableitung) und die grüne Kurve (zweite Ableitung) Zentimeter für Zentimeter. Verdeutlichen Sie sich, warum die betreffende Kurve gerade so an der gezeichneten Position verläuft. Achten Sie insbesondere auf die Stellen, wo die erste oder zweite Ableitung eine Nullstelle hat. Was besitzt $f(x)$ an diesen Stellen? Wenn Sie sich im Klaren sind, warum das gesamte Bild gerade so aussehen muss, haben Sie für die Differenzialrechnung und die Analysis viel gewonnen.



Experimentieren Sie selbst per grafikfähigem Taschenrechner oder Excel. Suchen Sie sich eine Funktion $f(x)$, ermitteln Sie die erste und zweite Ableitung und lassen Sie sich alle drei Kurven in einem Diagramm anzeigen. Begründen Sie sich dann erneut, warum die Kurven gerade wie angezeigt verlaufen und untersuchen Sie wichtige Punkte.

Lösen von Extremwertaufgaben

Beispiel: Minimierung der Länge eines Weidezauns

Ein Schäfer benötigt für seine Herde eine 500 m² große Weidefläche. Durch angrenzende Felder muss diese Weidefläche eine rechteckige Form mit den Kantenlängen a und b haben. Berechnen Sie die Kantenlängen a und b so, dass die Weidezaunlänge minimal wird.

Folgende Schritte sind erforderlich:

a) Stellen Sie eine Funktionsgleichung für die zu maximierende oder zu minimierende Größe in Abhängigkeit von der oder den entsprechend zu bestimmenden Variablen auf (Zielfunktion).

$$Weidezaunlänge = Umfang\ u = f(a,b) = 2a + 2b$$

b) Darstellung der zu maximierenden oder zu minimierenden Größe als Funktion nur einer Variablen (Einarbeitung von Nebenbedingungen). Die Weidefläche berechnet sich wie folgt:

$$Weidefläche = Fläche\ A = f(a,b) = a \cdot b$$

Durch Umstellung der Gleichung kann man b in Abhängigkeit von der gegebenen Fläche A und der Seitenlänge a darstellen:

$$A = a \cdot b$$
$$b = \frac{A}{a}$$

Jetzt kann man für die Weidezaunlänge schreiben:

$$Weidezaunlänge = Umfang\ u = f(a,b) = 2a + 2b$$
$$Weidezaunlänge = Umfang\ u = f(a,A) = 2 \cdot a + 2 \cdot \frac{A}{a} = 2 \cdot a + 2A \cdot a^{-1}$$

Damit wird die zu minimierende Weidezaunlänge nur noch als Funktion der Seitenlänge a und der gegebenen Fläche A dargestellt. Man hätte auch $u = f(b,A)$ wählen können.

c) Leiten Sie diese Funktion zwei Mal nach der zu bestimmenden Variablen ab. Gesucht wird hier die Seitenlänge a:

$$u = f(a,A) = 2 \cdot a + 2A \cdot a^{-1}$$

$$u' = f'(a,A) = 2 - 2A \cdot a^{-2}$$

$$u'' = f''(a,A) = 4A \cdot a^{-3}$$

d) Setzen Sie das Ergebnis der ersten Ableitung gleich Null und bestimmen Sie die dazugehörige Größe der Variablen – hier mit a_{min} bezeichnet, weil die Weidezaunlänge ja minimiert werden soll.

$$u' = f'(a,A) = 0 = 2 - 2A \cdot a_{min}^{-2}$$

$$2 = 2A \cdot a_{min}^{-2}$$
$$1 = A \cdot a_{min}^{-2}$$

$$\frac{1}{A} = a_{min}^{-2}$$
$$\frac{1}{A} = \frac{1}{a_{min}^2}$$
$$\sqrt{\frac{1}{A}} = \frac{1}{a_{min}}$$

$$a_{min} = \sqrt{A}$$

e) Überprüfen Sie durch Einsetzen des gefundenen Ergebnisses für die Variable in die zweite Ableitung, ob es sich dabei um ein Maximum oder ein Minimum handelt.

$$u'' = f''(a, A) = 4A \cdot a_{min}^{-3}$$

$$u'' = f''(a, A) = 4A \cdot \left(\sqrt{A}\right)^{-3}$$
$$u'' = f''(a, A) = 4A \cdot A^{-3/2}$$
$$u'' = f''(a, A) = 4 \cdot A^{-1/2}$$
$$u'' = f''(a, A) = \frac{4}{\sqrt{A}}$$

→ positive zweite Ableitung heißt Minimum für Umfang $u = Weidezaunlänge$

f) Berechnen Sie die gemäß Aufgabenstellung zu bestimmenden Variablen – hier die beiden Seitenlängen des Rechtecks.

$$a_{min} = \sqrt{A} = \sqrt{500\ m^2} = 22{,}361\ m$$

$$b_{min} = \frac{A}{a_{min}} = \frac{500\ m^2}{\sqrt{500\ m^2}} = \sqrt{500\ m^2} = 22{,}361\ m$$

→ quadratische Weidefläche ergibt minimale Weidezaunlänge

$$Weidezaunlänge_{min} = u_{min} = 2a_{min} + 2b_{min} = 2 \cdot 22{,}361\ m + 2 \cdot 22{,}361\ m = 89{,}443\ m$$