Vorwort: Die folgenden Ausführungen befassen sich mit einem mathematischen Thema, das aber nicht wie im Mathe-Buch, sondern verständlich erläutert vorgestellt wird. Da der Verfasser aus der Elektrotechnik kommt, hat er zum Teil andere Sichtweisen auf die Dinge. Vielleicht hilft gerade diese Besonderheit beim Verständnis der beschriebenen Mathematik.

Achtung: Trotz aller Sorgfalt bei der Erarbeitung kann keine Garantie für die Richtigkeit der Inhalte übernommen werden.

Eine Bemerkung zuvor: Wer hier jetzt große Theorie erwartet, den muss ich enttäuschen. Denn es geht hier nur um die Integralrechnung an sich. Da gibt es nicht viel zu sagen/schreiben. Es gibt einige wichtige Grundlagen und die Integrationsregeln und das ist es dann schon.

Ein anderer Punkt ist, was man mit der Integralrechnung alles machen kann. Zum Beispiel in der Analysis bei der Untersuchung von Funktionen. Diese Themen werden aber bei den entsprechenden anderen Soforthilfen ausführlich behandelt.

Inhaltsübersicht Integralrechnung

Grundbegriffe der Integralrechnung

Stammfunktion

Eine Funktion F(x) heißt Stammfunktion von $f(x)$, wenn gilt:

$F'(x) = f(x)$ mit $x \in D$ für $f(x)$ und F(x).

Besitzt eine Funktion mindestens eine Stammfunktion, so kann man unendlich viele Stammfunktionen zuordnen, die sich nur durch eine additive Konstante unterscheiden: Gilt also:

$F'(x) = f(x)$,

so gilt auch

$[F(x) + C]' = f(x)$,

wobei die Konstante C vollkommen variabel ist. Denn die Konstante fällt ja beim Bilden der ersten Ableitung weg.

Unbestimmtes Integral

Ist $F'(x) = f(x)$, so heißt die Funktion $y = F(x) + C$ unbestimmtes Integral von $f(x)$:

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

mit $f(x)$ als Integrand, dx als Differenzial und C als Integrationskonstante. Das Integrationszeichen

$$\int$$

ist ein spezielles Summenzeichen. Beim Integrieren summiert man also über Produkte von $f(x)$ und dx. Die Integrationskonstante C kann nur durch Berücksichtigung einer zusätzlichen Bedingung eindeutig festgelegt werden.

Bestimmtes Integral – Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung

Ist $F'(x) = f(x)$, so heißt die Funktion

$$\int_{x_A}^{x_B} f(x)dx = [F(x) + C]_{x_A}^{x_B}$$

$$\int_{x_A}^{x_B} f(x)dx = F(x_B) + C - F(x_A) - C$$

$$\int_{x_A}^{x_B} f(x)dx = F(x_B) - F(x_A)$$

bestimmtes Integral von $f(x)$. Dabei gilt:

$$\int_{x_A}^{x_A} f(x)dx = [F(x) + C]_{x_A}^{x_A} = F(x_A) + C - F(x_A) - C = F(x_A) - F(x_A) = 0$$

$$\int_{x_A}^{x_B} f(x)dx = -\int_{x_B}^{x_A} f(x)dx$$

$$\int_{x_A}^{x_B} f(x)dx = \int_{x_A}^{x_C} f(x)dx + \int_{x_C}^{x_b} f(x)dx$$

Wenn man also von $x_A = 5$ bis $x_B = 5$ integriert, ergibt sich für das Integral der Wert Null. Und wenn man nicht von $x_A = 0$ bis $x_B = 5$, sondern in entgegengesetzter Richtung von $x_A = 5$ bis $x_B = 0$ integriert, wechselt das Integral sein Vorzeichen. Kann man aus irgendwelchen Gründen nicht gleich von x_A bis x_B in einem Zug integrieren, sondern muss zwischenzeitlich bei x_C quasi einen Zwischenstopp einlegen, weil sich dort zum Beispiel Linien oder Graphen schneiden, kann man im Anschluss an das erste Integral von x_A bis x_C mit einem zweiten Integral von x_C bis x_B fertig integrieren.

Stammfunktionen bestimmter Grundfunktionen

Vergleiche Formelsammlung!

Integrationsregeln

Vergleiche Formelsammlung!

Faktorregel
Summenregel
Potenzregel
Substitutionsregel
Partielle Integration (Produktintegration)

Integralfunktion

Ist $f(t)$ im Intervall $[x_A, x_B]$ stetig und es gilt $f(t) \geq 0$ für $t \in [x_A, x_B]$, dann heißt die Funktion

$$J_{x_A}(x) = \int_{x_A}^{x} f(t)dt$$

für $x \in [x_A, x_B]$ Integralfunktion von $f(t)$ zur unteren Grenze x_A.

Hinweis: Lassen Sie sich nicht durch die Variable t irritieren – mit der gehen Sie genau wie sonst mit x um. Nur kann man hier x nicht gleichzeitig als Variable und als obere Integrationsgrenze verwenden. Es wird also über die Funktion $f(t)$ integriert und anschließend setzen Sie x als obere und x_A als untere Integrationsgrenze ein. Sie erhalten als Ergebnis einen (gewohnten) Ausdruck mit x. Geometrisch deuten kann man das Ergebnis als Fläche zwischen dem Graphen der Funktion $f(t)$ und der t-Achse (entspricht x-Achse) von der unteren festen Grenze x_A bis zur oberen variablen Grenze x.

Flächenberechnung zwischen dem Graphen einer Funktion und der x-Achse

Die Produkte von $f(x)$ und dx lassen sich als Flächeninhalte von Rechtecken mit der Höhe $f(x)$ und der Breite dx deuten. Die Höhe $f(x)$ entspricht dem Abstand zwischen dem Graphen der Funktion $f(x)$ und der x-Achse. Ein Rechteck hat also die Fläche $f(x)dx$. Somit summiert die Integration den Flächeninhalt zwischen dem Graphen der Funktion $f(x)$ und der x-Achse auf. Da die Größe dx differenziell klein ist, entsteht kein Fehler.

$$A = \int f(x)dx$$

mit der Fläche A in Flächeneinheiten FE.

Liegt der Graph der Funktion $f(x)$ oberhalb der x-Achse, entstehen positive Flächenanteile. Liegt er unterhalb, entstehen negative Flächenanteile.

Weitere Informationen im Kapitel Analysis!

Flächenberechnung zwischen einem Abschnitt des Graphen einer Funktion und der x-Achse

Die Fläche zwischen dem Graphen der Funktion $f(x)$ und der x-Achse wird nicht unbestimmt durch das Integral ermittelt, sondern sie ist zwischen einer unteren Grenze $x = x_A$ und einer oberen Grenze $x = x_B$ zu berechnen:

$$\int_{x_A}^{x_B} f(x)dx = F(x_B) - F(x_A)$$

mit der Fläche A in Flächeneinheiten FE.

Liegt der Graph der Funktion $f(x)$ zwischen den Grenzen $x = x_A$ und $x = x_B$ oberhalb der x-Achse, entstehen positive Flächenanteile. Liegt er unterhalb, entstehen negative Flächenanteile.

Weitere Informationen im Kapitel Analysis!

Mittelwertsatz der Integralrechnung

Wenn eine Funktion $f(x)$ in einem Intervall $[x_A, x_B]$ stetig ist, gibt es eine Zahl ξ mit $x_A \leq \xi \leq x_B$, für die gilt:

$$\int_{x_A}^{x_B} f(x)dx = f(\xi) \cdot (x_B - x_A)$$

Die Fläche zwischen dem Graphen von $f(x)$ und der x-Achse im Intervall von x_A bis x_B ist gleich der Fläche des Rechtecks mit der Höhe $f(\xi)$ und der Breite $(x_B - x_A)$.

Alle weiteren Informationen im Kapitel Analysis!