Vorwort: Die folgenden Ausführungen befassen sich mit einem mathematischen Thema, das aber nicht wie im Mathe-Buch, sondern verständlich erläutert vorgestellt wird. Da der Verfasser aus der Elektrotechnik kommt, hat er zum Teil andere Sichtweisen auf die Dinge. Vielleicht hilft gerade diese Besonderheit beim Verständnis der beschriebenen Mathematik.

Achtung: Trotz aller Sorgfalt bei der Erarbeitung kann keine Garantie für die Richtigkeit der Inhalte übernommen werden.

Inhaltsübersicht komplexe Zahlen

Grundlagen der komplexen Zahlen

Zum Verständnis

Eine komplexe Zahl besteht nicht nur aus e i n e r Größe, sondern sie setzt sich aus z w e i Komponenten zusammen, die verschiedene Bedeutung haben und die nicht miteinander vermischt oder verwechselt werden dürfen.

Beispiele für Größen aus zwei Komponenten:
- eine Position auf einem Schachbrett (Reihen und Spalten)
- eine Position im Gradnetz der Erde (Breite und Länge)
- die Orientierung in einer Tabelle (Zeilen und Spalten)
- die Orientierung in Stadtplänen (Einteilung in Suchfelder mit Spalten und Zeilen)

Komplexe Zahlen lassen sich auch als zweidimensionale Vektoren verstehen, die nur über eine x- und über eine y-Komponente verfügen. Die x-Komponente entspricht dem Realteil, die y-Komponente dem Imaginärteil der komplexen Zahl. Die Länge des Vektors entspricht dem Betrag und die Richtung des Vektors dem Winkel der komplexen Zahl. Toll – damit hätten wir schon die beiden Darstellungsformen von komplexen Zahlen eingeführt. Weiter unten folgen aber noch ausführliche Details dazu.

Imaginäre Einheit i

Für eine ganze Reihe von Berechnungen in der Elektrotechnik, benötigt man eine Variante, mit der man aus einer negativen Zahl eine Wurzel ziehen kann. Bisher ist ja ein negativer Radikant – das ist der Wurzelinhalt – ein Ausscheidungskriterium, ob irgendeine Lösung existiert oder ob das Problem nicht lösbar ist.

Wenn man unter dem Stichwort der komplexen Zahlen recherchiert, findet man das folgende. Definiert wird als erstes die sogenannte imaginäre Einheit i, für die gilt:

$$i^2 = -1$$

Setzt man diese imaginäre Einheit beim Lösen einer Wurzel mit negativem Inhalt ein, ergibt sich jetzt:

$$\sqrt{-a} = \sqrt{(-1) \cdot a} = \sqrt{i^2 \cdot a} = i \cdot \sqrt{a}$$

Dass es sich um ein besonderes Ergebnis handelt, sieht man an dem Vorfaktor i beim Ergebnis. Also das Ergebnis aus $\sqrt{-a}$ ist nur betragsmäßig gleich $\sqrt{a}$!

Für die Potenzen von i ergeben sich folgende Sachverhalte:

$$i^1 = i$$

$$i^0 = 1$$

$$i^{-1} = \frac{1}{i^1} = -i$$

Die ersten beiden Ausdrücke sind gewöhnlich – das gilt auch für alle anderen Potenzen hoch 1 und hoch 0. Der dritte Ausdruck ist besonders: Wenn man durch die imaginäre Einheit i dividiert, ergibt sich wieder i, aber eben mit negativem Vorzeichen.

Abschließende Bemerkung hier: Die Darstellung der imaginären Einheit durch j an Stelle von i ist ebenfalls gebräuchlich.

Darstellung komplexer Zahlen durch Realteil und Imaginärteil

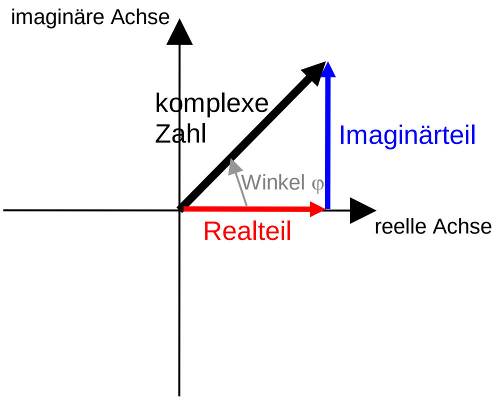
Wir wiederholen die Aussage vom Beginn dieses Kapitels: Eine komplexe Zahl besteht nicht nur aus einer Größe, sondern sie setzt sich aus zwei Komponenten zusammen, die verschiedene Bedeutung haben und die nicht miteinander vermischt oder verwechselt werden dürfen.

Die erste Variante für diese zwei Komponenten ist die Darstellung durch Real- und Imaginärteil, wobei mit Hilfe der vorgestellten imaginären Einheit i zwischen beiden unterschieden wird:

$$komplexe\ Zahl\ z = Realteil\ a + i \cdot Imaginärteil\ b$$

$$z = a + i \cdot b$$

Damit besteht die komplexe Zahl tatsächlich aus zwei Komponenten – einmal ohne und einmal mit der imaginären Einheit. In der sogenannten komplexen Zahlenebene ergibt sich folgendes Bild:



Man erkennt, dass die imaginäre Einheit i im Verhältnis zum Realteil eine um 90° gedrehte Richtung bewirkt. Der Imaginärteil der komplexen Zahl steht immer senkrecht auf dem Realteil. Ein positiver Imaginärteil zeigt in der Darstellung nach oben, ein negativer Imaginärteil nach unten. Ein positiver Realteil zeigt nach rechts, ein negativer nach links. Das muss aber nicht so sein. Es gibt auch andere Darstellungen der komplexen Ebene.

Da die beiden Komponenten der komplexen Zahl immer senkrecht aufeinander stehen, ergibt sich für den Betrag der komplexen Zahl ganz einfach:

$$Betrag\ der\ komplexen\ Zahl\ z = |z| = \sqrt{Realteil^2 + Imaginärteil^2}$$

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Realteil und Imaginärteil stehen senkrecht aufeinander. Es gilt die Gleichung:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

wie beim rechtwinkligen Dreieck.

Wenn man den Winkel bzw. die sogenannte Phase der komplexen Zahl zur reellen Achse berechnen will, ergibt sich hier:

$$\tan \varphi = \frac{Imaginärteil}{Realteil} = \frac{b}{a}$$

Mit der Umkehrfunktion zum tan erhält man:

$$\varphi = \arctan \frac{Imaginärteil}{Realteil} = \arctan \frac{b}{a}$$

$$\varphi = \tan^{-1} \frac{Imaginärteil}{Realteil} = \tan^{-1} \frac{b}{a}$$

Darstellung durch Betrag und Winkel (trigonometrische Darstellung)

Und noch einmal: Eine komplexe Zahl besteht nicht nur aus einer Größe, sondern sie setzt sich aus zwei Komponenten zusammen, die verschiedene Bedeutung haben und die nicht miteinander vermischt oder verwechselt werden dürfen.

Die zweite Variante für diese zwei Komponenten ist die Darstellung durch Betrag und Winkel:

$$komplexe\ Zahl\ z = Betrag\ von\ z \cdot e^{i\ Winkel\ von\ z}$$

$$komplexe\ Zahl\ z = |z| \cdot e^{i\,\varphi}$$

wobei auch hier gilt:

$$|z| = \sqrt{Realteil^2 + Imaginärteil^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

sodass sich ergibt:

$$komplexe\ Zahl\ z = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot e^{i\,\varphi}$$

Die Richtungsinformation = Winkel = Phase φ der komplexen Zahl bestimmt, wieviel vom Betrag der komplexen Zahl dem Realteil entspricht und wieviel vom Betrag dem Imaginärteil entspricht. Es gilt:

$$e^{i\,\varphi} = \cos\varphi + i \cdot \sin\varphi$$

Die Richtungsinformation $e^{i\,\varphi}$ entscheidet nur über die Richtung. Auf den Betrag der komplexen Zahl hat sie keinen Einfluss, denn es gilt:

$$\left|e^{i\,\varphi}\right| = \sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = \sqrt{1} = 1$$

Ersetzt man den Ausdruck $e^{i\,\varphi}$ in der Formel für die komplexe Zahl, kann man auch schreiben:

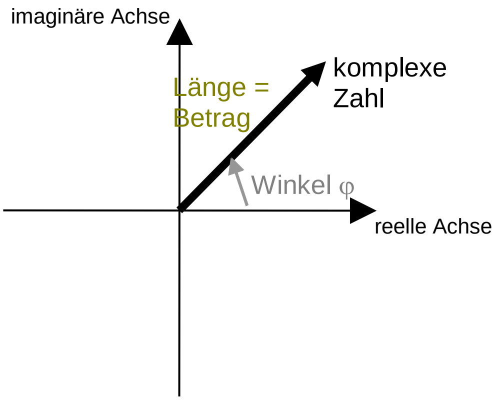
$$komplexe\ Zahl\ z = |z| \cdot \cos\varphi + i \cdot |z| \cdot \sin\varphi$$

Hier wird ganz deutlich, dass der Winkel φ darüber entscheidet, wieviel vom Betrag der komplexen Zahl dem Realteil und wieviel vom Betrag der komplexen Zahl dem Imaginärteil entspricht:

$$Realteil\ a = |z| \cdot \cos\varphi$$

$$Imaginärteil\ b = |z| \cdot \sin\varphi$$

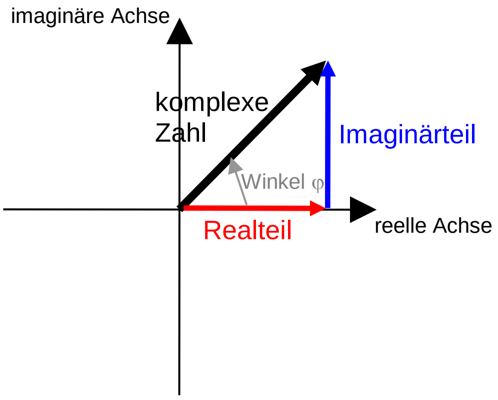
Damit besteht die komplexe Zahl auch in dieser Darstellung tatsächlich aus zwei Komponenten – dem Betrag und dem Winkel. In der sogenannten komplexen Zahlenebene ergibt sich folgendes Bild:



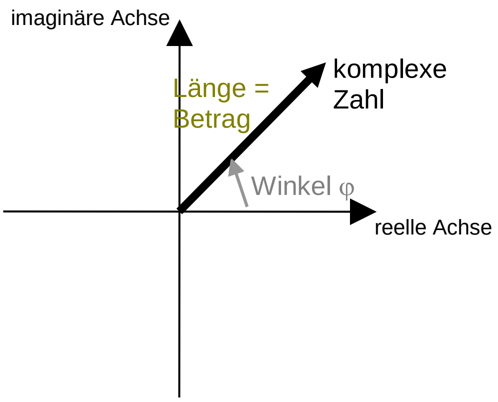
Man erkennt, dass der Betrag und der Winkel einer komplexen Zahl zwei völlig unterschiedliche Dinge sind. Der Betrag entscheidet über die Länge des quasi Vektors der komplexen Zahl. Der Winkel legt die Richtung fest, in die dieser quasi Vektor zeigt. Je nach dem Wert des Winkels entsteht auch hier eine komplexe Zahl mit positivem oder negativem Imaginärteil und postivem oder negativem Realteil.

Komplexe Zahlenebene

Wie schon gezeigt, besteht die komplexe Zahl entweder aus zwei Komponenten – aus Real- und Imaginärteil. In der sogenannten komplexen Zahlenebene ergibt sich folgendes Bild:



Oder aber die komplexe Zahl kann gleichberechtigt auch aus ihrem Betrag und ihrem Winkel bestehen. In der komplexen Zahlenebene ergibt sich folgendes Bild:



Rechenoperationen mit komplexen Zahlen

Eigentlich ist das Rechnen mit komplexen Zahlen ganz einfach. Man muss nur beachten, dass man niemals den Realteil und den Imaginärteil bzw. den Betrag und den Winkel vermischt. Um sauber rechnen zu können, ist es erforderlich, die beteiligten komplexen Zahlen in die für die beabsichtigte Rechnung günstige Darstellung zu überführen. Für Addition und Subraktion benötigt man die Realteil-Imaginärteil-Darstellung. Multiplikation und Division setzen die Betrag-Winkel-Darstellung voraus.

Addition: Der Realteil der Summe ergibt sich aus der Summe der Realteile, der Imaginärteil der Summe ergibt sich aus der Summe der Imaginärteile – schwieriges Deutsch, aber ganz einfach:

$$z_1 + z_2 = (a_1 + i \cdot b_1) + (a_2 + i \cdot b_2)$$
$$z_1 + z_2 = a_1 + a_2 + i \cdot b_1 + i \cdot b_2$$

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i \cdot (b_1 + b_2)$$

Liegen die komplexen Zahlen oder liegt eine komplexe Zahl nur in der Betrag-Winkel-Darstellung vor, muss zunächst umgerechnet werden:

$$komplexe\ Zahl\ z = |z| \cdot \cos\varphi + i \cdot |z| \cdot \sin\varphi$$

$$Realteil\ a = |z| \cdot \cos\varphi$$
$$Imaginärteil\ b = |z| \cdot \sin\varphi$$

Subtraktion: Der Realteil der Differenz ergibt sich aus der Differenz der Realteile, der Imaginärteil der Differenz ergibt sich aus der Differenz der Imaginärteile – erneut schwieriges Deutsch, aber auch ganz einfach:

$$z_1 - z_2 = (a_1 + i \cdot b_1) - (a_2 + i \cdot b_2)$$
$$z_1 - z_2 = a_1 - a_2 + i \cdot b_1 - i \cdot b_2$$

$$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + i \cdot (b_1 - b_2)$$

Liegen die komplexen Zahlen oder liegt eine komplexe Zahl nur in der Betrag-Winkel-Darstellung vor, muss zunächst umgerechnet werden:

$$komplexe\ Zahl\ z = |z| \cdot \cos\varphi + i \cdot |z| \cdot \sin\varphi$$

$$Realteil\ a = |z| \cdot \cos\varphi$$
$$Imaginärteil\ b = |z| \cdot \sin\varphi$$

Multiplikation: Der Betrag des Produkts ergibt sich aus dem Produkt der Beträge, der Winkel des Produkts ergibt sich aus der Summe der Winkel (da die Winkel wie Potenzen zu behandeln sind – es gelten die Potenzgesetze):

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot e^{i\,\varphi_1} \cdot |z_2| \cdot e^{i\,\varphi_2}$$
$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \cdot e^{i\,\varphi_1} \cdot e^{i\,\varphi_2}$$

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \cdot e^{i\,(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

Liegen die komplexen Zahlen oder liegt eine komplexe Zahl nur in der Realteil-Imaginärteil-Darstellung vor, muss zunächst umgerechnet werden:

$$|z| = \sqrt{Realteil^2 + Imaginärteil^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\varphi = \arctan\frac{Imaginärteil}{Realteil} = \arctan\frac{b}{a}$$

$$\varphi = \tan^{-1}\frac{Imaginärteil}{Realteil} = \tan^{-1}\frac{b}{a}$$

Division: Der Betrag des Quotienten ergibt sich aus dem Quotienten der Beträge, der Winkel des Quotienten ergibt sich aus der Differenz der Winkel (da die Winkel wie Potenzen zu behandeln sind – es gelten die Potenzgesetze):

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1| \cdot e^{i\,\varphi_1}}{|z_2| \cdot e^{i\,\varphi_2}}$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot \frac{e^{i\,\varphi_1}}{e^{i\,\varphi_2}}$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot e^{i\,\varphi_1} \cdot e^{-i\,\varphi_2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot e^{i\,(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

Liegen die komplexen Zahlen oder liegt eine komplexe Zahl nur in der Realteil-Imaginärteil-Darstellung vor, muss zunächst umgerechnet werden:

$$|z| = \sqrt{Realteil^2 + Imaginärteil^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\varphi = \arctan\frac{Imaginärteil}{Realteil} = \arctan\frac{b}{a}$$

$$\varphi = \tan^{-1}\frac{Imaginärteil}{Realteil} = \tan^{-1}\frac{b}{a}$$