Vorwort: Die folgenden Ausführungen befassen sich mit einem mathematischen Thema, das aber nicht wie im Mathe-Buch, sondern verständlich erläutert vorgestellt wird. Da der Verfasser aus der Elektrotechnik kommt, hat er zum Teil andere Sichtweisen auf die Dinge. Vielleicht hilft gerade diese Besonderheit beim Verständnis der beschriebenen Mathematik.

Achtung: Trotz aller Sorgfalt bei der Erarbeitung kann keine Garantie für die Richtigkeit der Inhalte übernommen werden.

Inhaltsübersicht lineare Algebra

Vektoren und Matrizen

Eine Bemerkung zuvor: Ausführliche Informationen zu Vektoren und zur Vektorrechnung befinden sich in der Soforthilfe „Vektorrechnung und analytische Geometrie“! Hier befasse ich mich nur mit den Grundlagen von Vektoren und Matrizen und den daraus resultierenden linearen Gleichungssystemen.

Matrix (Mehrzahl: Matrizen)

Rechteckiges Zahlenschema mit m Zeilen und n Spalten, das heißt es handelt sich um eine m x n-Matrix. Die Zahlen in der Matrix sind die Matrixelemente. Die Positionen der Elemente sind durch ihren doppelten Index festgelegt (erste Indexziffer = Zeile, zweite Indexziffer = Spalte).

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Eine quadratische Matrix zeichnet sich dadurch aus, dass die Zeilenanzahl gleich der Spaltenanzahl ist.

Zeilenvektor

Die Elemente der i-ten Zeile einer Matrix bilden einen Zeilenvektor:

$$\vec{a}_{zi} = (a_{i1} \quad a_{i2} \quad \dots \quad a_{ij} \quad \dots \quad a_{in})$$

i gibt die Nummer der betreffenden Zeile an.

Spaltenvektor

Die Elemente der j-ten Spalte einer Matrix bilden einen Spaltenvektor:

$$\vec{a}_{sj} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \dots \\ a_{ij} \\ \dots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

j gibt die Nummer der betreffenden Spalte an.

Addition und Subtraktion von Matrizen

Man addiert bzw. subtrahiert die Elemente zweier Matrizen, die in beiden an der gleichen Position stehen (gleiche Zeile und gleiche Spalte). Das Ergebnis der Addition bzw. Subtraktion steht in der Ergebnismatrix wieder an der selben Position.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} - b_{11} & a_{12} - b_{12} \\ a_{21} - b_{21} & a_{22} - b_{22} \end{pmatrix}$$

Hinweis: Entsprechend können nur Matrizen mit gleicher Zeilenanzahl und mit gleicher Spaltenanzahl addiert bzw. subtrahiert werden. Da jede Addition bzw. Subtraktion zweier Elemente ein Element in der Ergebnismatrix erzeugt, ergeben sich auch für die Ergebnismatrix die gleichen Zeilen- und Spaltenanzahlen.

Zwei einfache Zahlenbeispiele zur Verdeutlichung:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -4 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}$$

S-Multiplikation

Soll eine Matrix mit einer reellen Zahl multipliziert werden, so ist jedes einzelne Element der Matrix mit diesem Faktor zu multiplizieren. Gleiches gilt für die Division. Wer bei der Division spontan unsicher ist, multipliziert mit dem reziproken der Zahl, durch die zu dividieren wäre. So habe ich es auch im nachfolgenden Zahlenbeispiel gemacht. Damit ist alles klar.

$$a \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot b_{11} & a \cdot b_{12} \\ a \cdot b_{21} & a \cdot b_{22} \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{a} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} \cdot b_{11} & \frac{1}{a} \cdot b_{12} \\ \frac{1}{a} \cdot b_{21} & \frac{1}{a} \cdot b_{22} \end{pmatrix}$$

Zwei einfache Zahlenbeispiele zur Verdeutlichung:

$$8 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 16 \\ 24 & 32 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 16 & 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 8 & 10 \end{pmatrix}$$

Matrizenmultiplikation

Zwei Matrizen werden miteinander multipliziert, indem

a) die erste Zeile der ersten Matrix elementweise mit den Elementen der ersten Spalte in der zweiten Matrix multipliziert und die einzelnen Produkte anschließend aufsummiert werden. Das Ergebnis wird in die erste Zeile und erste Spalte der Ergebnismatrix eingetragen. Danach werden
b) die Elemente der ersten Zeile in der ersten Matrix elementweise mit den Elementen der zweiten Spalte der zweiten Matrix multipliziert und die Produkte wieder aufsummiert. Das Ergebnis wird in die erste Zeile und zweite Spalte der Ergebnismatrix geschrieben.
c) Fortsetzung dieses Ablaufs, bis alle Spalten der zweiten Matrix mit den Elementen der ersten Zeile der ersten Matrix multipliziert wurden. Es entsteht die erste Zeile der Ergebnismatrix, die so viele Elemente enthält, wie die zweite Matrix Spalten hat (So oft muss man ja Ergebnisse ausrechnen.)
d) Jetzt wiederholt man die Berechnung in gleicher Art und Weise mit der zweiten Zeile der ersten Matrix – sprich auch deren Elemente werden elementweise mit den Spaltenelementen in der zweiten Matrix multipliziert und die Ergebnisse aufaddiert. So entsteht die zweite Zeile in der Ergebnismatrix.
e) Fortsetzung, bis alle Zeilen der ersten Matrix abgearbeitet wurden. Es entstehen in der Ergebnismatrix also genau so viele Zeilen, wie die erste Matrix Zeilen hat.

Hier ein Formelbeispiel für die Multiplikation einer 2-3- mit einer 3-2-Matrix:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + a_{13} \cdot b_{31} & a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} + a_{13} \cdot b_{32} \\ a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} + a_{23} \cdot b_{31} & a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} + a_{23} \cdot b_{32} \end{pmatrix}$$

Zahlenbeispiel gefällig? Ich denke, dass das hilft:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 4 + 9 & 4 + 10 + 18 \\ 4 + 10 + 18 & 16 + 25 + 36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 32 \\ 32 & 77 \end{pmatrix}$$

Hinweise:

- Es können nur Matrizen miteinander multipliziert werden, wenn die Spaltenanzahl der ersten Matrix mit der Zeilenanzahl der zweiten Matrix übereinstimmt.
- Die Ergebnismatrix hat so viele Zeilen wie die erste Matrix und so viele Spalten wie die zweite Matrix.
- Sollte einer der beiden Faktoren ein Vektor sein, ist auch das Ergebnis ein Spalten- oder Zeilenvektor.
- Bei der Matrizenmultiplikation kann man die Faktoren nicht vertauschen, da dann unter Umständen schon die beschriebene Übereinstimmung der Spalten- mit der Zeilenanzahl nicht mehr gegeben ist.

Lineare Gleichungssysteme

Lineares Gleichungssystem

Es handelt sich hierbei um mehrere lineare Gleichungen, in denen die selben Variablen auftreten, wobei die Anzahl der Gleichungen in der Regel gleich der oder größer als die Anzahl an Variablen ist (sonst kann keine Lösung gefunden werden):

Ein Gleichungssystem mit zwei Variablen:

$$a_{11} \cdot x + a_{12} \cdot y = b_1$$
$$a_{21} \cdot x + a_{22} \cdot y = b_2$$

Ein Gleichungssystem mit drei Variablen:

$$a_{11} \cdot x + a_{12} \cdot y + a_{13} \cdot z = b_1$$
$$a_{21} \cdot x + a_{22} \cdot y + a_{23} \cdot z = b_2$$
$$a_{31} \cdot x + a_{32} \cdot y + a_{33} \cdot z = b_3$$

Hinweis: Linear heißt, dass alle Variablen nur linear auftreten, also zum Beispiel kein x^2 vorkommt, sonst wäre es zum Beispiel eine quadratische Gleichung.

Homogenität eines Gleichungssystems

Ein lineares Gleichungssystem heißt homogen, wenn alle Zahlen b_i gleich Null sind, sonst inhomogen. Entsprechend hat jedes homogene lineare Gleichungssystem mindestens die Lösung $x = y = \cdots = 0$.

Vor der Auflösung

Es hat sich als günstig erwiesen, die einzelnen Gleichungen des Gleichungssystems eindeutig zu kennzeichnen – zum Beispiel mit römischen Zahlen. Diese kommen in den Aufgabenstellungen in der Regel nicht vor. Bei jedem Rechenschritt sollten Sie vor die betreffende Zeile schreiben, aus welcher Ausgangsgleichung die vorzunehmende Aktion stammt. So hat man einen besseren Überblick und man arbeitet nicht aus Versehen mehrfach mit derselben Gleichung. Das hätte den Effekt, dass die Lösung so nicht gefunden werden kann, weil die Berechnungen voneinander abhängen.

Hinweis: Selbstverständlich kann man auch verschiedene Lösungsverfahren miteinander kombinieren. Wichtig bleibt, dass jeder Lösungsschritt aus einer jeweils noch unbenutzten Ausgangsgleichung abgeleitet wird – also zur Bestimmung von drei Variablen benötigt man in der Regel drei Gleichungen. Nur dann sind die Lösungsschritte voneinander unabhängig und führen zum Ergebnis.

Elementare Lösungsmöglichkeiten – Einsetzungsverfahren

Umstellung einer Gleichung nach einer Variablen und Einsetzung des gefundenen Ausdrucks an der Stelle der ausgesonderten Variablen in die nächste Gleichung. (Zum Beispiel Umstellung der ersten Gleichung nach x und die für x entstandene Formel wird dann an Stelle von x in die zweite Gleichung eingesetzt, womit dort die Variable x nicht mehr auftritt.

Handelt es sich um drei Variablen, müsste man die soeben erzeugte neue Form der zweiten Gleichung nochmals nach einer der beiden übrig gebliebenen Variablen umstellen und das Ergebnis dann in die dritte Gleichung einsetzen, wobei dort zuvor natürlich auch das x schon durch das Ergebnis aus der ersten Gleichung zu ersetzen ist. Übrig bleibt eine Gleichung, die nur noch eine Variable erhält, welche somit direkt bestimmbar ist. Mit dieser lassen sich dann die zweite und die erste Variable ausrechnen.

Formelmäßig-allgemein könnte das Einsetzungsverfahren bei drei Variablen beispielhaft wie folgt aussehen. Die sogenannten „Ausdrücke" sind irgendwelche mathematischen Formeln bzw. Terme, die sich aus den jeweiligen Größen der a_{xy}- und b_x-Koeffizienten ergeben. Für die Variable x ließe sich dieser Ausdruck noch ganz einfach formelmäßig bestimmen. Aber für die Variable y wird es doch erheblich unübersichtlicher. Deshalb habe ich diese „Ausdrücke" bevorzugt. Sie verdeutlichen sehr schön den Kern des Verfahrens.

Ausgangssituation ist ein Gleichungssystem mit drei Variablen:

$$a_{11} \cdot x + a_{12} \cdot y + a_{13} \cdot z = b_1$$
$$a_{21} \cdot x + a_{22} \cdot y + a_{23} \cdot z = b_2$$
$$a_{31} \cdot x + a_{32} \cdot y + a_{33} \cdot z = b_3$$

Schritt 1: Umstellung der ersten Gleichung nach x:

$$x = \{Ausdruck\ für\ x\ mit\ y\ und\ z\}$$

Schritt 2: Einsetzen der neuen Formel für x in die zweite Gleichung. Es bleibt eine Gleichung nur noch mit y und z übrig:

$$a_{21} \cdot x + a_{22} \cdot y + a_{23} \cdot z = b_2$$

$$a_{21} \cdot \{Ausdruck\ für\ x\ mit\ y\ und\ z\} + a_{22} \cdot y + a_{23} \cdot z = b_2$$

Schritt 3: Die neue Formel wird erneut nach einer der beiden übrig gebliebenen Variablen umgestellt – zum Beispiel nach y:

$$y = \{Ausdruck\ für\ y\ mit\ z\}$$

Schritt 4: Die gewonnenen Ergebnisse werden nun in die dritte Gleichung eingesetzt:

$$a_{31} \cdot x + a_{32} \cdot y + a_{33} \cdot z = b_3$$

$$a_{31} \cdot \{Ausdruck\ für\ x\ mit\ y\ und\ z\} + a_{32} \cdot \{Ausdruck\ für\ y\ mit\ z\} + a_{33} \cdot z = b_3$$

Schritt 5: Jetzt muss nur noch im $\{Ausdruck\ für\ x\ mit\ y\ und\ z\}$ das noch enthaltene y durch den $\{Ausdruck\ für\ y\ mit\ z\}$ ersetzt werden:

$$a_{31} \cdot \{Ausdruck\ für\ x\ mit\ \{Ausdruck\ für\ y\ mit\ z\}\ und\ z\} + a_{32} \cdot \{Ausdruck\ für\ y\ mit\ z\} + a_{33} \cdot z = b_3$$

Schritt 6: Es ist quasi schon geschafft! Jetzt hat man eine Gleichung, in der nur noch die Variable z enthalten ist. Deren Bestimmung ist damit möglich. Und hat man erst den konkreten Zahlenwert für z, kann man über die bunt markierten beiden Ausdrücke auch die Werte von y und x ausrechnen.

Elementare Lösungsmöglichkeiten – Gleichsetzungsverfahren

Zwei Gleichungen werden nach demselben Ausdruck umgestellt, wobei dieser eine Variable enthalten sollte, die im jeweils übrigbleibenden Gleichungsteil nicht mehr enthalten ist. Durch Gleichsetzen der beiden übrigbleibenden Gleichungsteile fällt die Variable, nach der umgestellt wurde, weg. Die andere Variable in den Gleichungsteilen wird eindeutig bestimmbar.

Also man stellt zwei Gleichungen nach einem übereinstimmenden Ausdruck um, der zum Beispiel die Variable x enthält. Die jeweils andere Seite der beiden Gleichungen darf als Variable nur noch y enthalten, x nicht mehr. Jetzt setzt man die beiden Ausdrücke ohne x gleich, d. h. auch die Gleichungsteile mit y müssen ja dann übereinstimmen. Aus der resultierenden Gleichung fällt x heraus und y lässt sich direkt bestimmen.

Formelmäßig-allgemein könnte das Gleichsetzungsverfahren bei zwei Variablen beispielhaft wie folgt aussehen. Die sogenannten „Ausdrücke“ sind wieder irgendwelche mathematischen Formeln bzw. Terme, die sich aus den jeweiligen Größen der a_{xy}- und b_x-Koeffizienten ergeben. Ausgangssituation ist ein Gleichungssystem mit zwei Variablen:

$$a_{11} \cdot x + a_{12} \cdot y = b_1$$
$$a_{21} \cdot x + a_{22} \cdot y = b_2$$

Schritt 1: Umstellung der ersten Gleichung nach x:

$$x = \{Ausdruck\ von\ Gleichung\ 1\ für\ x\ mit\ y\}$$

Schritt 2: Umstellung der zweiten Gleichung nach x:

$$x = \{Ausdruck\ von\ Gleichung\ 2\ für\ x\ mit\ y\}$$

Schritt 3: Gleichsetzen der beiden Formeln für x. Es entsteht eine Beziehung, die nur noch die Variablen y enthält:

$$\{Ausdruck\ von\ Gleichung\ 1\ für\ x\ mit\ y\} = \{Ausdruck\ von\ Gleichung\ 2\ für\ x\ mit\ y\}$$

Schritt 4: Da die neue Formel nur noch die Variable y enthält, kann y jetzt schon konkret bestimmt werden. Anschließend ist auch die Bestimmung der Variablen x mit Hilfe von einer der beiden gelb markierten Formeln für x kein Problem mehr. Egal, welche der beiden Formeln man verwendet – natürlich sollte sich für x der gleiche Zahlenwert ergeben.

Elementare Lösungsmöglichkeiten – Additionsverfahren

Die Ausgangsgleichungen werden so untereinander geschrieben, dass die gleichen Variablen mitsamt ihren Faktoren quasi in Spalten untereinander stehen. Jetzt werden die Gleichungen so miteinander addiert oder voneinander subtrahiert, dass möglichst viele, mindestens aber eine Variable aus dem Additionsergebnis herausfällt. In diese Addition oder Subtraktion muss man selbstverständlich alle Glieder der jeweiligen Gleichungen einbeziehen. Es ist erlaubt, eine Gleichung vor der Addition oder Subtraktion mit einem Faktor zu multiplizieren (dann aber alle Elemente der Gleichung – sonst stellt sie einen anderen Sachverhalt dar). Ziel der ganzen Aktion ist, eine Ergebnisgleichung zu erzeugen, die nur noch eine Variable enthält, die dann ausgerechnet wird.

Wollen wir auch noch ein Beispiel für das Additionsverfahren bei drei Variablen durchspielen? Mit allgemeinen a_{xy}- und b_x-Koeffizienten wie bei den vorherigen Verfahren wird das nichts. Deshalb setze ich an Stelle der a_{xy}- und b_x-Koeffizienten konkrete Zahlen ein. Ausgangssituation ist also nochmal ein Gleichungssystem mit drei Variablen:

$$\begin{aligned} -10 \cdot x + 10 \cdot y + 10 \cdot z &= 50 \\ 4 \cdot x + 6 \cdot y - 2 \cdot z &= -4 \\ -2 \cdot x - 4 \cdot y + 4 \cdot z &= 10 \end{aligned}$$

Schritt 1: Zwei der gegebenen Gleichungen müssen nun so umgeformt werden, dass ihre gliedweise Addition (oder auch Subtraktion) zum Wegfall einer Variablen führt. Das scheint bei den Gleichungen 2 und 3 zu funktionieren, wenn man die Gleichung 3 zuvor mit dem Faktor 2 multipliziert:

$$\begin{aligned} -10 \cdot x + 10 \cdot y + 10 \cdot z &= 50 \\ 4 \cdot x + 6 \cdot y - 2 \cdot z &= -4 \\ -4 \cdot x - 8 \cdot y + 8 \cdot z &= 20 \end{aligned}$$

Schritt 2: Die gliedweise Addition der (neuen) Gleichungen 2 und 3 führt auf:

$$\begin{array}{rrrl} 4\cdot x + & 6\cdot y - & 2\cdot z = & -4 \\ -4\cdot x - & 8\cdot y + & 8\cdot z = & 20 \\ \hline 0\cdot x - & 2\cdot y + & 6\cdot z = & 16 \end{array}$$

Schritt 3: Damit entsteht eine neue Gleichung ohne die Variable x. Wenn man die neue Beziehung umformt, kann man schreiben:

$$\begin{aligned} 0\cdot x - 2\cdot y + 6\cdot z &= 16 \\ -2\cdot y + 6\cdot z &= 16 \\ -2\cdot y &= 16 - 6\cdot z \\ y &= -8 + 3\cdot z \end{aligned}$$

Schritt 4: Damit man diese neue Beziehung jetzt gewinnbringend in die Ausgangsgleichung 1 einsetzen kann, müssen wir zunächst noch einen Ausdruck für die Variable x in Abhängigkeit von y und z generieren – ich mache das mal aus der Gleichung 2:

$$\begin{aligned} 4\cdot x + 6\cdot y - 2\cdot z &= -4 \\ 4\cdot x &= -4 - 6\cdot y + 2\cdot z \\ x &= -1 - 1{,}5\cdot y + 0{,}5\cdot z \end{aligned}$$

Schritt 5: Einsetzen der neuen Formeln für x und y in die erste Gleichung. Es bleibt eine Gleichung nur noch mit y und z übrig, in der ich dann auch das y mit Hilfe der gelb markierten Formel für y eliminieren kann:

$$\begin{aligned} -10\cdot x + 10\cdot y + 10\cdot z &= 50 \\ -10\cdot(-1 - 1{,}5\cdot y + 0{,}5\cdot z) + 10\cdot(-8 + 3\cdot z) + 10\cdot z &= 50 \\ -10\cdot(-1 - 1{,}5\cdot(-8 + 3\cdot z) + 0{,}5\cdot z) + 10\cdot(-8 + 3\cdot z) + 10\cdot z &= 50 \end{aligned}$$

Schritt 6: Damit ist auch diese Nuss geknackt! Jetzt hat man eine Gleichung, in der nur noch die Variable z enthalten ist. Deren Bestimmung ist damit möglich – ich habe es mal in kleinen Schritten vorgenommen:

$$\begin{aligned} -10\cdot(-1 - 1{,}5\cdot(-8 + 3\cdot z) + 0{,}5\cdot z) + 10\cdot(-8 + 3\cdot z) + 10\cdot z &= 50 \\ -10\cdot(-1 - (-12 + 4{,}5\cdot z) + 0{,}5\cdot z) + (-80 + 30\cdot z) + 10\cdot z &= 50 \\ -10\cdot(-1 + 12 - 4{,}5\cdot z + 0{,}5\cdot z) - 80 + 30\cdot z + 10\cdot z &= 50 \\ (10 - 120 + 45\cdot z - 5\cdot z) - 80 + 30\cdot z + 10\cdot z &= 50 \\ 10 - 120 + 45\cdot z - 5\cdot z - 80 + 30\cdot z + 10\cdot z &= 50 \\ 80\cdot z - 190 &= 50 \\ 80\cdot z &= 240 \\ \boldsymbol{z} &= \mathbf{3} \end{aligned}$$

Schritt 7: Und hat man erst den konkreten Zahlenwert für z, kann man über die bunt markierten beiden Ausdrücke auch die Werte von y und x ausrechnen:

$$\begin{aligned} y &= -8 + 3\cdot z \\ y &= -8 + 3\cdot 3 \\ \boldsymbol{y} &= \mathbf{1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= -1 - 1{,}5\cdot y + 0{,}5\cdot z \\ x &= -1 - 1{,}5\cdot 1 + 0{,}5\cdot 3 \\ \boldsymbol{x} &= \mathbf{-1} \end{aligned}$$