Vorwort: Die folgenden Ausführungen befassen sich mit einem mathematischen Thema, das aber nicht wie im Mathe-Buch, sondern verständlich erläutert vorgestellt wird. Da der Verfasser aus der Elektrotechnik kommt, hat er zum Teil andere Sichtweisen auf die Dinge. Vielleicht hilft gerade diese Besonderheit beim Verständnis der beschriebenen Mathematik.

Achtung: Trotz aller Sorgfalt bei der Erarbeitung kann keine Garantie für die Richtigkeit der Inhalte übernommen werden.

Inhaltsübersicht Vektorrechnung und analytische Geometrie

Begriff Vektor

Pfeil

Anfangspunkt
Endpunkt
Richtung
Länge

Vektor

Eine Klasse parallelgleicher Pfeile heißt Vektor. Sie zeichnen sich durch identische Richtung und Länge = Betrag aus. Ansonsten ist ein Vektor frei im Raum verschiebbar, ohne dass sich seine Eigenschaften verändern. Erst wenn es sich zum Beispiel um einen Ortsvektor handelt, ist er an den Koordinatenursprung gebunden und damit eindeutig festgelegt.

Schreibweise von Vektoren

Üblich sind Schreibweisen mit x-, y-, und z-Variablen oder die Komponentenschreibweise mit a_x, a_y und a_z zum Beispiel für den Vektor $\vec{a}$:

Spaltenvektor: $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$

Zeilenvektor: $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x & a_y & a_z \end{pmatrix}$

Darstellung von Vektoren im dreidimensionalen Raum

Raum mit x-, y-, und z-Dimension (zur Vermeidung der unübersichtlichen x_1-, x_2- und x_3-Darstellung)

Definition der Länge = Betrag eines Vektors

Wurzel aus der Summe der Quadrate seiner Koordinaten

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

Berechnung der Koordinaten eines Vektors

Vektorkoordinaten = Endpunktkoordinaten minus Anfangspunktkoordinaten (nur dann zeigt seine Richtung auch zum Endpunkt – das ist wichtig für eventuelle Winkelberechnungen). Dahinter verbirgt sich nichts anderes, als die Operation:

$$gesuchter\ Vektor = Ortsvektor\ Endpunkt - Ortsvektor\ Anfangspunkt$$

Besondere Vektoren

Nullvektor Der Nullvektor $\vec{0}$ (und nur dieser) besitzt den Betrag 0.

Einheitsvektor

Der Betrag eines Vektors $\vec{a}$ ist eine eindeutig bestimmte nichtnegative reelle Zahl. Gilt $|\vec{a}| = 1$, so heißt $\vec{a}$ Einheitsvektor. Berechnung:

$$\vec{a}_0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$$

Rechnen mit Vektoren

Addition

$$\begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \\ a_z + b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$$

Es können also nur Vektoren mit gleicher Koordinatenanzahl miteinander addiert werden. Natürlich können die zu addierenden Vektoren vertauscht werden – die üblichen Additionsgesetze gelten auch hier.

Subtraktion

$$\begin{pmatrix} a_x - b_x \\ a_y - b_y \\ a_z - b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$$

Es können also nur Vektoren mit gleicher Koordinatenanzahl voneinander subtrahiert werden. Natürlich dürfen die voneinander zu subtrahierenden Vektoren nicht vertauscht werden – die üblichen Subtraktionsgesetze gelten auch hier.

Multiplikation eines Vektors mit einer reellen Zahl (S-Multiplikation)

Bei der Multiplikation eines Vektors mit einer reellen Zahl werden alle Komponenten des Vektors mit dieser Zahl multipliziert, der Vektor verändert also seinen Betrag, aber nicht seine Richtung.

$$r \cdot \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot a_x \\ r \cdot a_y \\ r \cdot a_z \end{pmatrix}$$

Umgekehrt besteht die Möglichkeit, einen Faktor aus allen Komponenten eines Vektors auszuklammern und diesen als Zahl vor den Vektor zu schreiben.

Vektorprodukte

<u>Skalarprodukt</u> zweier Vektoren (Punktprodukt)

Geometrische Deutung:

Mit dem Skalarprodukt kann man nicht so viel Spektakuläres anfangen. Es handelt sich halt um ein Produkt:

- Kenne ich die Faktoren, kann ich das Produkt bestimmen.
- Kenne ich das Produkt, erlaubt das Rückschlüsse auf den oder die beteiligten Vektoren (zum Beispiel ihren Betrag).
- Und da man das Skalarprodukt bekanntlich auch über die Vektorbeträge und den Cosinus des eingeschlossenen Winkels berechnen kann, kann man im Umkehrschluss auch den Winkel zwischen zwei Vektoren bestimmen.

Berechnung über Vektorkomponenten

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z$$

Berechnung über Vektorbeträge und eingeschlossenen Winkel

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi$$

Rechentechnische Eigenschaften des Skalarprodukts

$\vec{a} \bullet \vec{b} = \vec{b} \bullet \vec{a}$

$(\vec{a} + \vec{b}) \bullet \vec{c} = \vec{a} \bullet \vec{c} + \vec{b} \bullet \vec{c}$

$(r \cdot \vec{a}) \bullet \vec{b} = r \cdot (\vec{a} \bullet \vec{b})$

$\vec{a} \bullet \vec{a} \geq 0$, aber $\vec{a} \bullet \vec{a} = 0$, wenn $\vec{a} = \vec{0}$

$\vec{a} \bullet \vec{b} = 0$, wenn $\vec{a}$ senkrecht auf $\vec{b}$.

Berechnung des Winkels zwischen zwei Vektoren

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

<u>Vektorprodukt</u> zweier Vektoren (Kreuzprodukt)

Geometrische Deutung:

Das Ergebnis des Kreuzprodukts der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist ein Vektor, der senkrecht auf der von den beiden Vektoren aufgespannten Ebene steht. Die drei Vektoren (zwei Faktoren und das Ergebnis) bilden ein Rechtssystem. Die Länge bzw. der Betrag des Ergebnis-Vektors entspricht dem Flächeninhalt des Parallelogramms, das von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannt wird.

Folgendes lässt sich mit Hilfe des Kreuzprodukts ausrechnen:

- Das Ergebnis des Kreuzprodukts entspricht dem Ebenen-Normalenvektor der von den beiden Vektoren aufgespannten Fläche.
- Berechne ich von diesem Ergebnis-Vektor den Betrag, erhalte ich ein Maß für die Fläche des *Parallelogramms*, das von den beiden Vektoren aufgespannt wird.
- Achtung! Die Fläche dieses Parallelogramms entspricht der doppelten Fläche des von den beiden Vektoren aufgespannten *Dreiecks*.
- Und da man das Vektorprodukt bekanntlich auch über die Vektorbeträge und den Sinus des eingeschlossenen Winkels berechnen kann, kann man im Umkehrschluss auch den Winkel zwischen den zwei Vektoren bestimmen.

Berechnung über Vektorkomponenten (Regel von Sarrus)

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y \cdot b_z - a_z \cdot b_y \\ a_z \cdot b_x - a_x \cdot b_z \\ a_x \cdot b_y - a_y \cdot b_x \end{pmatrix}$$

Berechnung des Betrags des Vektorprodukts über Vektorbeträge und eingeschlossenen Winkel

$$\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = \left|\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}\right| = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \sin\varphi$$

Rechentechnische Eigenschaften des Vektorprodukts

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\left(\vec{b} \times \vec{a}\right)$$

$$\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$$

$$(r \cdot \vec{a}) \times \vec{b} = r \cdot \left(\vec{a} \times \vec{b}\right)$$

$$\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$$

$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$, wenn $\vec{a} = \vec{0}$ oder $\vec{b} = \vec{0}$ oder wenn $\vec{a}$ und $\vec{b}$ parallel zueinander.

Berechnung des Winkels zwischen zwei Vektoren

$$\sin\varphi = \frac{\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|}{|\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right|}$$

<u>Spatprodukt</u> dreier Vektoren (gemischtes Produkt)

Geometrische Deutung:

Das Spatprodukt, auch gemischtes Produkt genannt, ist das Skalarprodukt aus dem Kreuzprodukt zweier Vektoren und einem dritten Vektor. Das Ergebnis ist also eine Zahl und kein Vektor, denn im ersten Schritt wird immer das Kreuzprodukt und im zweiten Schritt immer das Skalarprodukt berechnet.

Das Ergebnis des Spatprodukts ist gleich dem orientierten Volumen des durch die drei Vektoren aufgespannten Spats (Parallelepipeds). Das ist ein Körper mit einem Parallelogramm als Grundfläche, welches durch die Vektoren des Kreuzprodukts aufgespannt wird. Diese Grundfläche wird dann durch den dritten Vektor des Spatprodukts in einen räumlichen Körper aufgespannt, wobei der dritte Vektor eine Kante dieses Körpers bildet.

Die Richtung dieses dritten Vektors bestimmt, ob der Körper mehr oder weniger schräg verschoben erscheint. Und der Betrag dieses dritten Vektors ist – in Abhängigkeit von der Schrägverschiebung des Körpers – ein Maß für die Höhe des aufgespannten Körpers über seiner Grundfläche. Würde der dritte Vektor senkrecht auf dem Ergebnis des Kreuzprodukts stehen, ist sein Betrag gleich der Höhe des Körpers. Je kleiner der Winkel zwischen dem Ergebnis des Kreuzprodukts und dem dritten Vektor wird, desto kleiner ist auch das verbleibende Volumen des Körpers. Liegt der dritte Vektor in der vom Kreuzprodukt aufgespannten (Grund-)Fläche, ist das Volumen letztlich gleich Null, weil ja auch der im Skalarprodukt enthaltene Cosinus dann Null ergibt.

Das Vorzeichen des Spatprodukts ist positiv, falls die drei Vektoren in der angegebenen Reihenfolge ein Rechtssystem bilden. Bilden sie ein Linkssystem, so ist es negativ. Liegen die drei Vektoren in einer Ebene, so ist ihr Spatprodukt Null.

Berechnung über Vektorkomponenten – es ist immer zuerst das Vektorprodukt = Kreuzprodukt und danach das Skalarprodukt = Punktprodukt zu berechnen (deshalb habe ich die eckigen Klammern gesetzt)

$$(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \bullet \vec{c} = \left[\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}\right] \bullet \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix}$$

Berechnung des Betrags des Spatprodukts über Betrag von Kreuzprodukt, Betrag des dritten Vektors und eingeschlossenen Winkel zwischen diesen beiden Faktoren

$$|(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c})| = |(\vec{a} \times \vec{b}) \bullet \vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cdot \sin\varphi_{\vec{a},\vec{b}} \cdot \cos\varphi_{\vec{a}\times\vec{b},\vec{c}}$$

Mit den rechentechnischen Eigenschaften des Spatprodukts halte ich mich hier mal zurück. Da gibt es viele Beziehungen, die unter bestimmten Bedingungen gelten. Schon die vorhergehende Formel findet man so eher nicht in der Literatur, aber sie müsste korrekt sein.

Das Spatprodukt tauchte bisher nur selten in den Abi-Leistungskursen auf und tiefer gehende Rechnungen fanden auch eher nicht statt. Sucht jemand weitere Details zum Beispiel für das Studium, müsste er sich an anderer Stelle informieren.

Beziehungen zwischen Vektoren

Lineare Unabhängigkeit von Vektoren

Eine Vektormenge heißt *linear unabhängiges Vektorsystem*, wenn sich kein Vektor dieser Menge als sogenannte Linearkombination der übrigen Vektoren aus dieser Menge darstellen lässt, das heißt die folgende Gleichung keine Lösung hat:

$$\vec{a}_1 = a_2 \cdot \vec{a}_2 + a_3 \cdot \vec{a}_3 + a_4 \cdot \vec{a}_4 + \cdots + a_k \cdot \vec{a}_k$$

Lässt sich für die Gleichung eine Lösung finden, handelt es sich bei der Vektormenge um ein *linear abhängiges Vektorsystem*, das heißt es gelingt, einen Vektor aus der Menge mit Hilfe der übrigen Vektoren darzustellen.

Für den Versuch der Lösung verwandelt sich die Vektorgleichung in ein lineares Gleichungssystem, das mit den normalen Lösungsmethoden untersucht werden kann.

Bei zwei Vektoren reduziert sich die Gleichung auf:

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$$

Es wird der Versuch unternommen, den Vektor $\vec{a}$ mit Hilfe des Vektors $\vec{b}$ darzustellen. Gelingt das, indem sich für r ein einheitlicher Faktor für alle drei Koordinaten finden lässt, sind beide Vektoren linear abhängig, andernfalls linear unabhängig. Lineare Abhängigkeit zwischen zwei Vektoren kann nur bestehen, wenn beide Vektoren in die gleiche oder in die entgegengesetzte Richtung zeigen (dann würde r negativ, um die Richtung von $\vec{b}$ umzukehren) – sie müssten dafür also auf alle Fälle parallel sein. Der Faktor r hat ja keine Auswirkungen auf die Richtung der Vektoren, sondern nur auf ihre Länge.

Der Faktor r wird zum Beispiel mit Hilfe der x-Koordinaten ermittelt und dann prüft man, ob der gefundene Wert auch für die y- und z-Koordinaten eine korrekte Beziehung ergibt.

Bei drei Vektoren entsteht die Beziehung:

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix}$$

Es wird der Versuch unternommen, den Vektor $\vec{a}$ mit Hilfe der anderen beiden Vektoren $\vec{b}$ und $\vec{c}$ darzustellen. Gelingt das, indem sich für r und s jeweils einheitliche Faktoren für alle drei Koordinaten finden lassen, sind die drei Vektoren linear abhängig, andernfalls linear unabhängig.

Man stellt die Gleichung für die x-Koordinaten zum Beispiel nach s um. Das Ergebnis setzt man in die Gleichung für die y-Koordinaten ein. Damit erhält man die Lösung für r. Über die umgestellte erste Gleichung bestimmt man s. Die so gefundenen Ergebnisse für r und s werden in die Gleichung der z-Koordinaten eingesetzt. Entsteht eine richtige Beziehung für die z-Koordinaten, sind die Vektoren linear abhängig, andernfalls unabhängig.

Darstellung von Objekten im Raum

Punkt

Eigenschaften eines Punktes – einzelner Punkt im Raum, festgelegt durch seine Koordinaten

Vektorielle Darstellung durch den Ortsvektor

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

Koordinatendarstellung

$$P(p_x, p_y, p_z)$$

Gerade

Eigenschaften einer Geraden – keine Krümmung und immer unendlich lang

Vektorielle Darstellung mit Ortsvektor und Richtungsvektor im dreidimensionalen Raum

Punktrichtungsgleichung

$$\vec{x} = \vec{p} + t \cdot \vec{a}$$

$\vec{p}$ ist der Ortsvektor eines Punktes auf der Geraden, t ein Parameter aus den rationalen Zahlen und $\vec{a}$ der Richtungsvektor, der nicht der Nullvektor sein darf. Man „steigt" also über $\vec{p}$ erst einmal vom Koordinatenursprung aus auf die Gerade „drauf" und kann sich dann durch Veränderung von t beliebig auf der Geraden bewegen. Es gibt keinen Punkt auf der Geraden, den man nicht durch eine geeignete Größe von t erreicht. Ausführlich geschrieben ergibt sich für den dreidimensionalen Fall (im zweidimensionalen Raum entfallen einfach die z-Komponenten):

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$$

Zweipunktegleichung

$$\vec{x} = \vec{p} + t \cdot (\vec{q} - \vec{p})$$

Auch hier ist $\vec{p}$ wieder der Ortsvektor vom Koordinatenursprung zu einem ersten Punkt auf der Geraden und t wieder der Parameter. An Stelle des Richtungsvektors $\vec{a}$ wird hier die Differenz aus dem Ortsvektor und einem zweiten Punkt $\vec{q}$ auf der Geraden eingesetzt. Diese Differenz ist nichts anderes als ein Richtungsvektor, der vom Ende des Ortsvektors $\vec{p}$ zum Ende des Ortsvektors $\vec{q}$ zeigt (der Ausdruck in der Klammer ist als Endpunkt minus Anfangspunkt zu deuten ...). Da beide Ortsvektoren Punkte auf der Geraden markieren, liegt entsprechend auch der entstehende Richtungsvektor parallel zu dieser, womit er seiner Funktion voll gerecht werden kann. Ausführlich geschrieben ergibt sich für den dreidimensionalen Fall (im zweidimensionalen Raum entfallen einfach die z-Komponenten):

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} q_x - p_x \\ q_y - p_y \\ q_z - p_z \end{pmatrix}$$

Koordinatendarstellung = allgemeine Form der Geradengleichung im zweidimensionalen Raum (z. B. x-y-Ebene)

$$a \cdot x + b \cdot y = c$$

Normalform in der x-y-Ebene

$$y = m \cdot x + n$$

Man erkennt, dass man die Größen m und n unkompliziert aus der Koordinatendarstellung berechnen kann.

Achsenabschnittsgleichung für eine Gerade in der x-y-Ebene

$$\frac{x}{s_x} + \frac{y}{s_y} = 1$$

s_x gibt den Schnittpunkt mit der x-Achse und s_y den Schnittpunkt mit der y-Achse an. Setzt man die jeweils andere Koordinate gleich Null (nur dann berechnet man den Schnittpunkt), ergibt sich das zwangsläufig. Genauso kann man die Achsenschnittpunkte auch aus der Koordinatendarstellung ermitteln:

$$s_x = \frac{c}{a}$$

und

$$s_y = \frac{c}{b}$$

Umrechnung der Vektor- in die Koordinatendarstellung und umgekehrt

Vektor → Koordinaten:
Eliminierung des Parameters (den Parameter z. B. als Funktion von x darstellen und den gefundenen Ausdruck an Stelle des Parameters in die y-Beziehung einsetzen, man erhält eine Formel ohne Parameter nur mit x und y)

Koordinaten → Vektor:
Den Ortsvektor der Geraden ermittelt man, indem man abwechselnd für x und für y Null in die Koordinatengleichung einsetzt. Die dabei entstehenden Ergebnisse y_0 und x_0 sind die Koordinaten des Ortsvektors $\vec{p}$ in der Punktrichtungsgleichung. Den Richtungsvektor kann man ermitteln, indem man die Koordinatengleichung so umstellt, dass auf der linken Seite vom Gleichheitszeichen nur noch die Koordinate y steht. Die Zahl vor dem x bildet den Richtungsvektor in der Art, dass man für seine x-Komponente den Wert 1 einsetzt und für seine y-Komponente die Zahl vor dem x (entspricht dem Anstieg). Bewegt man sich um eine Längeneinheit in Richtung x (deshalb dort die 1) steigt oder fällt die Gerade genau um die Größe des Anstiegs in y-Richtung.

Geradennormalenvektor

Jeder Vektor $\vec{n}$, der ungleich dem Nullvektor ist und senkrecht auf einer Geraden g steht, wird als Normalenvektor oder auch als Stellungsvektor von g bezeichnet. Die Koeffizienten a und b der Koordinatendarstellung der Geraden g bilden die Koordinaten des Geradennormalenvektors von g:

$$a \cdot x + b \cdot y = c$$

hat zur Folge

$$\vec{n} = \binom{a}{b}$$

Die Größe von c spielt keine Rolle, da die Einbeziehung eines eventuellen Faktors bei der Berechnung von a und b lediglich die Länge des Normalenvektors beeinflusst, nicht aber seine Richtung.

Geradennormaleneinheitsvektor

Für bestimmte Berechnungen benötigt man einen normierten Normalenvektor, das heißt der Normalenvektor hat die Länge bzw. den Betrag 1. Der Normaleneinheitsvektor berechnet sich über:

$$\vec{n}_0 = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$$

Der Normalenvektor wird durch seinen eigenen Betrag geteilt, womit die Länge bzw. der Betrag des entstehenden Normaleneinheitsvektors immer 1 ist.

Normalengleichung einer Geraden in der Ebene

Aus dem Sachverhalt, dass erstens der Normalenvektor einer Geraden immer senkrecht auf der betreffenden Geraden steht und zweitens das Skalarprodukt (Punktprodukt) zweier senkrecht aufeinander stehender Vektoren wegen der enthaltenen Cos-Funktion immer den Wert Null ergibt, kann man eine Gerade noch durch eine weitere Gleichung beschreiben:

$$(\vec{x} - \vec{x}_0) \bullet \vec{n} = 0$$

Der Vektor $\vec{x}_0$ ist nichts anderes als ein Ortsvektor vom Koordinatenursprung zu einem Punkt auf der Geraden. Und solange der Vektor $\vec{x} - \vec{x}_0$ von diesem Punkt zu einem beliebigen anderen Punkt – beschrieben durch $\vec{x}$ – senkrecht zum Normalenvektor der Geraden verläuft, befindet sich der beliebige andere Punkt ebenfalls auf der Geraden. Wer sich das jetzt räumlich vorstellt und Widerspruch anmeldet, dem sei gesagt, dass das nur für eine Gerade in einer Ebene gilt. Stellen Sie sich im dreidimensionalen Raum eine Gerade und ihren zugehörigen Normalenvektor vor, dann sind wir uns einig, dass die Gerade beliebig um den Normalenvektor rotieren kann, ohne den rechten Winkel zum Normalenvektor zu verlassen (die Spur aller möglichen Geraden bildet eine Scheibe bzw. Ebene, auf der der Normalenvektor senkrecht steht).

Normalengleichung einer Geraden in der Ebene in der Hesseschen Normalenform

Ersetzen Sie in der Normalengleichung einer Geraden in der Ebene den Normalenvektor durch den normierten Normalenvektor, ergibt sich die sogenannte Hessesche Normalenform:

$$(\vec{x} - \vec{x}_0) \bullet \vec{n}_0 = 0$$

Diese Variante der Geradengleichung eignet sich insbesondere zur unkomplizierten Berechnung des Abstandes zwischen der Geraden und beliebigen Punkten oder Objekten in der Ebene. Liegt nämlich der durch den Vektor $\vec{x}$ beschriebene Punkt nicht auf der Geraden, ergibt sich als Ergebnis rechts vom Gleichheitszeichen natürlich nicht die Null, sondern ein Maß für den Abstand a zwischen der Geraden und dem besagten Punkt. Das schöne an der Hesseschen Normalform ist dabei, dass das Punktprodukt eventuelle Schräglagen zwischen $\vec{x}$ und $\vec{x}_0$ bezüglich der Geraden automatisch korrigiert. Der berechnete Abstand ist also immer der Abstand senkrecht von der Geraden weg gemessen. Schuld daran ist wieder die Cos-Funktion im Punktprodukt – je schräger die Verbindungslinie zwischen $\vec{x}$ und $\vec{x}_0$ verläuft, desto größer wird der Winkel zwischen der Verbindungslinie und dem Geradennormaleneinheitsvektor. Und die Cos-Funktion liefert ja zwischen 0° und 90° bekanntlich immer kleinere Werte, je größer der Winkel wird.

Ebene

Eigenschaften einer Ebene – keine Krümmung und immer unendlich ausgedehnt

Vektorielle Darstellung

Punktrichtungsgleichung

$$\vec{x} = \vec{p} + s \cdot \vec{a} + t \cdot \vec{b}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$$

Der Vektor $\vec{p}$ wird als Stützvektor der Ebene bezeichnet. Er dient zum Erreichen der Ebenenfläche ausgehend vom Koordinatenursprung. Das heißt der Punkt P, auf den der Stützvektor zeigt, liegt in der Ebene.

Die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind die linear unabhängigen Richtungs- oder Spannvektoren der Ebene. Würde man die Ebene nur mit einem Spannvektor festlegen wollen, so könnte die Ebene um diesen einen Vektor frei rotieren. Praktisch würde dieser Fall dem Hin- und Herkippen eines Brettes (Ebene) über einem geraden Geländer (Spannvektor) entsprechen. Erst die Festlegung eines vom Geländer wegzeigenden zweiten Spannvektors (linear unabhängig) legt die Ebene im wahrsten Sinne des Wortes fest. Sobald wir zwei benachbarte Tischkanten (linear unabhängig) ins Spiel bringen, muss sich die Tischplatte bekanntlich zwischen erster und zweiter Tischkante befinden. Liegen beide Tischkanten waagerecht, kann man auf der Tischplatte etwas abstellen, weil sie sich auch in einer waagerechten Lage befindet. Steht eine der beiden Tischkanten senkrecht, muss auch die ganze Tischplatte senkrecht stehen. Man kann sich auch vorstellen, dass die beiden *Spann*vektoren eine Gummihaut zwischen sich auf*spannen*. Dann ist diese Gummihaut ein Ausschnitt aus der unendlich großen Ebene.

Dreipunktegleichung

$$\vec{x} = \vec{p} + s \cdot (\vec{q} - \vec{p}) + t \cdot (\vec{r} - \vec{p})$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} q_x - p_x \\ q_y - p_y \\ q_z - p_z \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} r_x - p_x \\ r_y - p_y \\ r_z - p_z \end{pmatrix}$$

Bei der Dreipunktegleichung wird die Ebene durch drei Punkte definiert, die nicht auf einer Linie liegen dürfen. Erstens durch den Punkt, auf den der Stützvektor $\vec{p}$ zeigt, und zwei weitere beliebige Punkte, die nur auf der Ebene liegen müssen. Vorstellen kann man sich das wie bei einem früheren Bürodrehstuhl mit drei Beinen. Wir alle wissen, dass diese drei Beine ausreichen, um den Stuhl in eine definierte, senkrechte Lage zu versetzen. Das bedeutet nichts anderes, als dass die drei Beine dann in einer Ebene liegen, die parallel zum Fußboden angeordnet ist. Allgemeinbekannt ist auch die Erfahrung, dass ein Stuhl oder Tisch mit drei Beinen niemals wackelt oder kippelt – die Festlegung einer Ebene mit Hilfe von drei Punkten ist also hinreichend eindeutig.

Nachdem also ein Punkt als Ziel des Stützvektors $\vec{p}$ verwendet wird, berechnet man aus den anderen beiden Ebenenpunkten – auf sie verweisen die Vektoren $\vec{q}$ und $\vec{r}$ – zwei Spannvektoren. Damit unterscheidet sich die Ebenengleichung in Dreipunkteform quasi nicht von der in Punktrichtungsform.

Koordinatendarstellung = allgemeine Form der Ebenengleichung

$$a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z = d$$

Achsenabschnittsgleichung für eine Ebene

$$\frac{x}{s_x} + \frac{y}{s_y} + \frac{z}{s_z} = 1$$

s_x gibt den Schnittpunkt mit der x-Achse, s_y den Schnittpunkt mit der y-Achse und s_z den Schnittpunkt mit der z-Achse an. Setzt man die jeweils anderen beiden Koordinaten gleich Null (nur dann berechnet man den Schnittpunkt), ergibt sich das zwangsläufig. Genauso kann man die Achsenschnittpunkte auch aus der Koordinatendarstellung ermitteln:

$$s_x = \frac{d}{a}$$

$$s_y = \frac{d}{b}$$

$$s_z = \frac{d}{c}$$

Umrechnung der Vektor- in die Koordinatendarstellung und umgekehrt

Vektor → Koordinaten:

Eliminierung des Parameters – im entstehenden linearen Gleichungssystem kann man in der Regel mit Hilfe der zweifachen Anwendung des Additionsverfahrens die beiden Parameter leicht als Funktion nur von x, y und/oder z darstellen;
die gefundenen Ausdrücke setzt man an Stelle der Parameter in eine Beziehung ein; es ergibt sich eine Formel ohne Parameter nur mit x und y

Koordinaten → Vektor:

Der Ansatz lautet: Erste Koordinate = erster Parameter und zweite Koordinate = zweiter Parameter. Danach ermittelt man die Gleichungen zur Darstellung der Koordinaten x, y und z. Sind diese gefunden, schreibt man sie sortiert untereinander und formt sie in Vektoren um. Es gibt – je nach Lösungsansatz – viele mögliche Lösungen (eine Ebene beherbergt ja allein schon unendlich viele Punkte, auf die ein Stützvektor zeigen kann – von den ungezählten Kombinationen zweier Spannvektoren ganz zu schweigen).
Man kann die Richtigkeit des Ergebnisses am einfachsten überprüfen, in dem man einen bekannten Punkt auf der Ebene in die gefundene Gleichung einsetzt und die zugehörigen Parameter bestimmt. Gibt es für diese eine eindeutige Lösung, ist das Ergebnis korrekt.
Erfahrungen besagen, dass speziell diese Umrechnung immer wieder zu Problemen führt. Deshalb zeigt die folgende Darstellung den beschriebenen Rechenweg im Detail.

$$a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z = d$$
$$x = \mathbf{s}$$

$$y = t$$

$$a \cdot s + b \cdot t + c \cdot z = d$$

$$c \cdot z = d - a \cdot s - b \cdot t$$

$$z = \frac{d}{c} - \frac{a}{c} \cdot s - \frac{b}{c} \cdot t$$

$$x = 0 + 1 \cdot s + 0 \cdot t$$
$$y = 0 + 0 \cdot s + 1 \cdot t$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{d}{c} \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{a}{c} \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{b}{c} \end{pmatrix}$$

Ebenennormalenvektor

Jeder Vektor$\vec{n}$, der ungleich dem Nullvektor ist und senkrecht auf einer Ebene E steht, wird als Normalenvektor oder auch als Stellungsvektor von E bezeichnet. Die Koeffizienten a, b und c der Koordinatendarstellung der Ebene E bilden die Koordinaten des Ebenennormalenvektors von E:

$$a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z = d$$

hat zur Folge

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Die Größe von d spielt keine Rolle, da die Einbeziehung eines eventuellen Faktors bei der Berechnung von a, b und c lediglich die Länge des Normalenvektors beeinflusst, nicht aber seine Richtung.

Geradennormaleneinheitsvektor

Für bestimmte Berechnungen benötigt man einen normierten Normalenvektor, das heißt der Normalenvektor hat die Länge bzw. den Betrag 1. Der Normaleneinheitsvektor berechnet sich über:

$$\vec{n}_0 = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$$

Der Normalenvektor wird durch seinen eigenen Betrag geteilt, womit die Länge bzw. der Betrag des entstehenden Normaleneinheitsvektors immer 1 ist.

Normalengleichung einer Ebene

Aus dem Sachverhalt, dass erstens der Normalenvektor einer Ebene immer senkrecht auf der betreffenden Ebene steht und zweitens das Skalarprodukt (Punktprodukt) zweier senkrecht aufeinander stehender Vektoren wegen der enthaltenen cos-Funktion immer den Wert Null ergibt, kann man eine Ebene noch durch eine weitere Gleichung beschreiben:

$$(\vec{x} - \vec{x}_0) \bullet \vec{n} = 0$$

Der Vektor $\vec{x}_0$ ist nichts anderes als ein Ortsvektor vom Koordinatenursprung zu einem Punkt auf der Ebene. Und solange der Vektor $\vec{x} - \vec{x}_0$ von diesem Punkt zu einem beliebigen anderen Punkt –

beschrieben durch $\vec{x}$ – senkrecht zum Normalenvektor der Ebene verläuft, befindet sich der beliebige andere Punkt ebenfalls auf der Ebene. Stellen Sie sich das im dreidimensionalen Raum vor, dann sind wir uns einig, dass der Vektor $\vec{x} - \vec{x}_0$ beliebig um den Normalenvektor rotieren kann, ohne den rechten Winkel zum Normalenvektor zu verlassen. Die Spur aller möglichen Vektoren $\vec{x} - \vec{x}_0$ bildet eine Scheibe bzw. Ebene, auf der der Normalenvektor senkrecht steht, womit die Wirkungsweise der obigen Gleichung bildhaft erklärt ist.

Normalengleichung einer Ebene in der Hesseschen Normalenform

Ersetzen Sie in der Normalengleichung einer Ebene den Normalenvektor durch den normierten Normalenvektor, ergibt sich die sogenannte Hessesche Normalenform:

$$(\vec{x} - \vec{x}_0) \bullet \vec{n}_0 = 0$$

Diese Variante der Ebenengleichung eignet sich insbesondere zur unkomplizierten Berechnung des Abstandes zwischen der Ebene und beliebigen Punkten oder Objekten im Raum. Liegt nämlich der durch den Vektor $\vec{x}$ beschriebene Punkt nicht auf der Ebene, ergibt sich als Ergebnis rechts vom Gleichheitszeichen natürlich nicht die Null, sondern ein Maß für den Abstand a zwischen der Ebene und dem besagten Punkt. Das schöne an der Hesseschen Normalform ist dabei, dass das Punktprodukt eventuelle Schräglagen zwischen $\vec{x}$ und $\vec{x}_0$ bezüglich der Ebene automatisch korrigiert. Der berechnete Abstand ist also immer der Abstand senkrecht von der Ebene weg gemessen. Schuld daran ist wieder die cos-Funktion im Punktprodukt – je schräger die Verbindungslinie zwischen $\vec{x}$ und $\vec{x}_0$ verläuft, desto größer wird der Winkel zwischen der Verbindungslinie und dem Geradennormaleneinheitsvektor. Und die cos-Funktion liefert ja zwischen 0° und 90° bekanntlich immer kleinere Werte, je größer der Winkel wird.

Beispiele für besondere Ebenen mit zugehörigen Ebenengleichungen in Koordinaten- und Parameterform (soweit allgemeingültig angebbar):

Ebene in der xy-Ebene, d. h. $z = 0$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ebene in der xz-Ebene, d. h. $y = 0$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_x \\ 0 \\ p_z \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} a_x \\ 0 \\ a_z \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ 0 \\ b_z \end{pmatrix}$$

Ebene in der yz-Ebene, d. h. $x = 0$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$$

Ebene, die die x-Achse enthält:

$$a \cdot y + b \cdot z = 0$$

Für $y = 0$ ergibt sich immer auch z$= 0$, womit man sich an einer beliebigen Stelle auf der x-Achse befindet.

Ebene, die die y-Achse enthält:

$a \cdot x + b \cdot z = 0$

Für $x = 0$ ergibt sich immer auch z$= 0$, womit man sich an einer beliebigen Stelle auf der y-Achse befindet.

Ebene, die die z-Achse enthält:

$a \cdot x + b \cdot y = 0$

Für $x = 0$ ergibt sich immer auch y$= 0$, womit man sich an einer beliebigen Stelle auf der x-Achse befindet.

Ebene, die parallel zur x-Achse verläuft:

$a \cdot y + b \cdot z = c$

Es sind nur y und z miteinander verknüpft. Der zum Beispiel für ein bestimmtes y entstehende z-Wert hat für beliebige x Gültigkeit. Der Abstand von der x-Achse wird durch c hervorgerufen, wobei c aber nicht gleich dem Abstand der Ebene zur x-Achse ist.

Ebene, die parallel zur y-Achse verläuft:

$a \cdot x + b \cdot z = c$

Es sind nur x und z miteinander verknüpft. Der zum Beispiel für ein bestimmtes x entstehende z-Wert hat für beliebige y Gültigkeit. Der Abstand von der y-Achse wird durch c hervorgerufen, wobei c aber nicht gleich dem Abstand der Ebene zur y-Achse ist.

Ebene, die parallel zur z-Achse verläuft:

$a \cdot x + b \cdot y = c$

Es sind nur x und y miteinander verknüpft. Der zum Beispiel für ein bestimmtes x entstehende y-Wert hat für beliebige z Gültigkeit. Der Abstand von der z-Achse wird durch c hervorgerufen, wobei c aber nicht gleich dem Abstand der Ebene zur z-Achse ist.

Beziehungen zwischen geometrischen Objekten im Raum

Zwei Punkte

Mögliche Anordnungen

verschieden	mindestens ein Koordinatenwert ist unterschiedlich
identisch	identische Koordinaten

Abstand zweier Punkte

Entspricht dem Betrag des Abstands = Länge des Vektors zwischen beiden Punkten.

Punkt und Gerade

Mögliche Anordnungen

Punkt nicht auf Geraden	Punktkoordinaten erfüllen Geradengleichung nicht
Punkt auf Geraden	Punktkoordinaten erfüllen Geradengleichung

Abstand a zwischen Koordinatenursprung und Gerade

Entspricht dem Betrag des Skalarprodukts aus dem Ortsvektor auf die Gerade und dem Geradennormaleneinheitsvektor (Verwendung der Hesseschen Normalenform):

$$\left|\vec{x}_0 \bullet \vec{n}_{g0}\right| = a$$

Abstand a zwischen Punkt und Gerade

Entspricht dem Betrag des Skalarprodukts aus einem Vektor vom Punkt außerhalb der Geraden zu einem Punkt auf der Geraden und dem Geradennormaleneinheitsvektor (Verwendung der Hesseschen Normalenform):

$$\left|\left(\vec{x}_P - \vec{x}_g\right) \bullet \vec{n}_{g0}\right| = a$$

Zwei Geraden im zweidimensionalen Raum (XY-Diagramm)

Mögliche Anordnungen (bezogen auf die beiden Geradengleichungen $y_1 = m_1 \cdot x + n_1$ und $y_2 = m_2 \cdot x + n_2$)

identisch	gleiche Anstiege und gleiche absolute Glieder
parallel	gleiche Anstiege und unterschiedliche absolute Glieder
schneidend	unterschiedliche Anstiege (windschief, d. h. kein Schnittpunkt, nicht möglich)

Schnittpunkt sich schneidender Geraden

Gleichsetzung der Geradengleichungen ermöglicht Berechnung der Schnittpunktkoordinaten

Eingeschlossener Winkel sich schneidender Geraden

Berechnung über Differenz der Anstiege

Abstand paralleler Geraden

Entspricht der Differenz der absoluten Glieder.

Zwei Geraden im dreidimensionalen Raum

Mögliche Anordnungen (bezogen auf die dreidimensionalen Geradengleichungen $\vec{x}_1 = \vec{p}_1 + r \cdot \vec{a}_1$ und $\vec{x}_2 = \vec{p}_2 + s \cdot \vec{a}_2$)

identisch	gleiche Richtungen (Richtungsvektoren linear abhängig) und Ortsvektor der einen Gerade erfüllt Geradengleichung der zweiten Gerade
parallel	gleiche Richtungen (Richtungsvektoren linear abhängig), aber Ortsvektor der einen Gerade erfüllt nicht Geradengleichung der zweiten Gerade
schneidend	unterschiedliche Richtungen (Richtungsvektoren nicht linear unabhängig), Geradengleichungen können gleichgesetzt werden und Parameter sind eindeutig bestimmbar (mit deren Hilfe kann Schnittpunkt berechnet werden)
windschief	unterschiedliche Richtungen (Richtungsvektoren nicht linear unabhängig), keine eindeutige Lösung der gleichgesetzten Geradengleichungen

Abstand a zwischen zwei parallelen oder windschiefen Geraden

Entspricht dem Betrag des Skalarprodukts aus einem Vektor von einem Punkt auf der ersten zu einem Punkt auf der zweiten Gerade und dem Geradennormaleneinheitsvektor der zweiten Geraden (Verwendung der Hesseschen Normalenform)

$$\left|\left(\vec{x}_{g1} - \vec{x}_{g2}\right) \bullet \vec{n}_{g_2 0}\right| = a$$

Eingeschlossener Winkel sich schneidender Geraden

Berechnung über Skalarprodukt der Richtungsvektoren

Punkt und Ebene

Mögliche Anordnungen

Punkt auf Ebene	Koordinaten des Punktes erfüllen Ebenengleichung
Punkt nicht auf Ebene	Koordinaten des Punktes erfüllen nicht Ebenengleichung

Abstand a zwischen Ursprung und Ebene

Entspricht dem Betrag des Skalarprodukts aus dem Ortsvektor auf die Ebene und dem Ebenennormaleneinheitsvektor (Verwendung der Hesseschen Normalenform):

$$|\vec{x}_0 \bullet \vec{n}_0| = a$$

Abstand a zwischen Punkt und Ebene

Entspricht dem Betrag des Skalarprodukts aus einem Vektor vom Punkt außerhalb der Ebene zu einem Punkt auf der Ebene und dem Ebenennormaleneinheitsvektor (Verwendung der Hesseschen Normalenform):

$$|(\vec{x}_P - \vec{x}_E) \bullet \vec{n}_{E0}| = a$$

Gerade und Ebene

Mögliche Anordnungen

Gerade liegt auf Ebene	mindestens zwei Punkte auf der Geraden erfüllen die Ebenengleichung
Gerade parallel zur Ebene	Ebenennormalenvektor und Geradenrichtungsvektor bilden Winkel von 90°
Gerade schneidet Ebene	Ebenen- und Geradengleichung können gleichgesetzt werden und Parameter sind eindeutig bestimmbar (mit deren Hilfe kann Schnittpunkt berechnet werden); Berechnung des eingeschlossenen Winkels, wenn die Gerade die Ebene schneidet, über 90° minus dem Winkel zwischen dem Richtungsvektor der Geraden und dem Ebenennormalenvektor

Abstand a zwischen Ebene und paralleler Gerade

Entspricht dem Betrag des Skalarprodukts aus einem Vektor von einem Punkt auf der Geraden zu einem Punkt auf der Ebene und dem Ebenennormaleneinheitsvektor

$$\left|\left(\vec{x}_g - \vec{x}_E\right) \bullet \vec{n}_{E0}\right| = a$$

Zwei Ebenen

Mögliche Anordnungen

identisch	Ebenen haben gleiche Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen
parallel	Winkel zwischen den Ebenennormalenvektoren ist Null, aber die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen sind unterschiedlich
schneidend	Ebenengleichungen werden gleichgesetzt, es entsteht als Lösung eine Geradengleichung als Schnittgerade der beiden Ebenen

Eingeschlossener Winkel sich schneidender Ebenen

Berechnung über den Winkel zwischen den Ebenennormalenvektoren

Abstand a zweier paralleler Ebenen

Betrag des Skalarprodukts aus einem Vektor von einem Punkt auf der ersten Ebene zu einem Punkt auf der zweiten Ebene und dem Ebenennormaleneinheitsvektor einer der beiden Ebenen

$$\left|(\vec{x}_{E1} - \vec{x}_{E2}) \bullet \vec{n}_{E_1 0\ oder\ E_2 0}\right| = a$$