Vorwort: Die folgenden Ausführungen befassen sich mit einem mathematischen Thema, das aber nicht wie im Mathe-Buch, sondern verständlich erläutert vorgestellt wird. Da der Verfasser aus der Elektrotechnik kommt, hat er zum Teil andere Sichtweisen auf die Dinge. Vielleicht hilft gerade diese Besonderheit beim Verständnis der beschriebenen Mathematik.

Achtung: Trotz aller Sorgfalt bei der Erarbeitung kann keine Garantie für die Richtigkeit der Inhalte übernommen werden.

Inhaltsübersicht Zahlenfolgen und Grenzwerte

Zahlenfolgen

Nummer der Glieder

n Natürliche Zahl, die die Nummer eines Gliedes in einer Folge angibt, man spricht vom n-ten Glied (ist zum Beispiel $n = 1$, handelt es sich um das 1. Glied der Folge, ist $n = 10$, ist das 10. Glied der Folge gemeint).
Da Folgen unendlich lang sein können (das heißt unendlich viele Glieder haben), wächst n dann im Verlauf der Folge von 1 bis ∞.

$n + 1$ Nummer des n+1-ten Gliedes einer Folge, es ist die Nachfolgenummer des n-ten Gliedes (zum Beispiel Nummer 11 nach dem Glied mit Nummer 10)

$n - 1$ Nummer des n-1-ten Gliedes einer Folge, es ist die Vorgängernummer des n-ten Gliedes (zum Beispiel Nummer 9 vor dem Glied mit Nummer 10).

Glieder

a_n Glied mit der Nummer n – oder anders gesprochen: n-tes Glied einer Folge (Die Zahl n ist dabei nur der Zähler des Gliedes in der Folge. Zum Beispiel handelt es sich bei a_{10} um das 10. Glied der Folge)

a_{n+1} Glied mit der Nummer n+1 – oder anders gesprochen: n+1-tes Glied einer Folge (a_{n+1} ist das Nachfolgeglied nach a_n. Zum Beispiel folgt a_{11} nach a_{10}.)

a_{n-1} Glied mit der Nummer n-1 – oder anders gesprochen: n-1-tes Glied einer Folge (a_{n-1} ist das Vorgängerglied vor a_n. Zum Beispiel steht a_9 vor a_{10}.)

Rekursive Berechnung

Der Wert des Folgengliedes a_{n+1} wird mit Hilfe des Wertes des vorhergehenden Folgengliedes a_n berechnet. (Zum Beispiel ermittelt man die Größe von a_{11} durch eine mathematische Operation mit a_{10}.)

Explizite Berechnung

Der Wert des Folgengliedes a_n wird – unabhängig von der Größe des Vorgängergliedes a_{n-1} – nur aus dem zugehörigen Wert von n ermittelt. (Zum Beispiel berechnet man a_{10} durch eine mathematische Operation mit der Zahl 10.)

Unterschied zwischen Funktion und Zahlenfolge

Hat eine Funktion $f(x)$ als Definitionsbereich nicht den Bereich der rationalen Zahlen R, sondern nur den Bereich der natürlichen Zahlen N oder eine Teilmenge von diesen, so reduziert sich die Funktion $f(x)$ auf eine Folge einzelner Funktionswerte $f(n)$. Die Funktion ist nur noch für die Werte $x = 1, x = 2, x = 3, \dots, x = n$ berechenbar. Der Funktionswert $f(n)$ wird bezeichnet mit a_n und ist das n-te Glied der Folge.

Wertetabelle

Tabellarische Darstellung der Größe der Folgenglieder a_n (2. Zeile) unter den zugehörigen Werten von n (1. Zeile)

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_n										

Monotonie

streng monoton steigend — Folge steigt ununterbrochen an
$a_n < a_{n+1}$ für alle n

monoton steigend — Folge fällt nie, kann aber Bereiche ohne Anstieg haben (Parallelverlauf zur x-Achse)
$a_n \leq a_{n+1}$ für alle n

streng monoton fallend — Folge fällt ununterbrochen ab
$a_n > a_{n+1}$ für alle n

monoton fallend — Folge steigt nie, kann aber Bereiche ohne Gefälle haben (Parallelverlauf zur x-Achse)
$a_n \geq a_{n+1}$ für alle n

Beschränktheit und Schranken

Die Folge übersteigt eine obere Schranke nicht (Folge ist nach oben beschränkt) oder unterschreitet eine untere Schranke nicht (Folge ist nach unten beschränkt)

S Symbol für die obere Schranke
s Symbol für die untere Schranke

Graph

Graphische Darstellung der Folge im n-a_n-Diagramm – als Graph bezeichnet man die so entstehende Punktereihe (keine durchgehende Linie, da Folgenglieder nur für ganzzahlige n existieren).

Unendliche Folge

Zahlenfolge mit uneingeschränktem Definitionsbereich, das heißt n läuft von 1 bis ∞ (der Definitionsbereich umfasst die natürlichen Zahlen).

Endliche Folge

Zahlenfolge mit eingeschränktem Definitionsbereich, das heißt n läuft nur von 1 bis k (der Definitionsbereich umfasst nur die ersten k natürlichen Zahlen).

Konstante Folge

Zahlenfolge, deren Glieder untereinander alle gleich sind.

Arithmetische Folge

Zwei aufeinander folgende Glieder unterscheiden sich nur durch eine konstante Differenz d und a_n kann aus a_{n-1} und a_{n+1} durch Berechnung des arithmetischen Mittelwerts berechnet werden:

$$d = a_{n+1} - a_n$$

Das gilt für alle n.

Zum Beispiel: 2; 4; 6; 8; 10; 12; ...

Die rekursive Berechnung einer arithmetischen Zahlenfolge erfolgt über die Formel:

$$a_{n+1} = a_n + d$$

mit Angabe von a_1.

Die explizite Berechnung einer arithmetischen Zahlenfolge erfolgt über die Formel:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$$

oder

$$a_n = a_0 + n \cdot d$$

Arithmetischer Mittelwert:

$$a_n = \frac{1}{2} \cdot (a_{n-1} + a_{n+1})$$

Geometrische Folge

Der Quotient q zweier aufeinander folgenden Glieder ist konstant und a_n kann aus a_{n-1} und a_{n+1} durch Berechnung des geometrischen Mittelwerts berechnet werden:

$$q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Das gilt für alle n.

Zum Beispiel: 2; 4; 8; 16; 32; 64; ...

Die rekursive Berechnung einer geometrischen Zahlenfolge erfolgt über die Formel:

$$a_{n+1} = a_n \cdot q$$

mit Angabe von a_1.

Die explizite Berechnung einer geometrischen Zahlenfolge erfolgt über die Formel:

$$a_n = a_1 + q^{(n-1)}$$

oder

$$a_n = a_0 + q^n$$

Geometrischer Mittelwert:

$$a_n = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}$$

Alternierende Folge

Folge, bei der zwei aufeinander folgende Glieder stets verschiedene Vorzeichen haben.

Zum Beispiel: 2; -4; 8; -16; 32; -64; ...

Die explizite Berechnung der Folgenglieder a_n enthält den Faktor
$(-1)^n$ (a_1 ist dann negativ) oder
$(-1)^{n-1}$ (a_1 ist dann positiv).

Häufungspunkt

Eine Zahl heißt Häufungspunkt einer unendlichen Folge, wenn in jeder beliebig kleinen Umgebung dieser Zahl unendlich viele Glieder dieser Folge liegen.

Zum Beispiel: 1; 2; 1; 4; 1; 8; 1; 16; 1; 32; 1; 64; 1; ...
Folge mit Häufungspunkt 1

Grenzwert

Zahl, der sich die Glieder einer Folge mit zunehmendem n immer weiter annähern. Bei Vorgabe eines bestimmten Abstands vom Grenzwert, kann man errechnen, ab welchem n die Glieder der Folge diesen Abstand zum Grenzwert unterschreiten. Formelmäßige Darstellung:

$$Grenzwert\ g = \lim_{n \to \infty} a_n$$

Eine Folge kann höchstens einen Grenzwert besitzen.

Konvergente Folge

Folge, die einen Grenzwert besitzt. „Die Folge konvergiert gegen den Grenzwert ....“.

Divergente Folge

Folge, die keinen Grenzwert besitzt.

Nullfolge

Folge, die den Grenzwert Null besitzt.

Grenzwertsätze

Rechenregeln für die Berechnung von Grenzwerten einer Summe, einer Differenz, eines Produkts und eines Quotienten (vgl. Formelsammlung).

Grenzwerte von Funktionen

Grenzwert im Unendlichen

Eine Funktion $f(x)$ hat die Zahl g als Grenzwert für $x \to \infty$ oder $x \to -\infty$, wenn zu jeder noch so kleinen Zahl ε eine reelle Zahl z angegeben werden kann, für die gilt:

$x > z \Rightarrow |f(x) - g| < \varepsilon$

Ist die Variable x größer als die Zahl z, wird der Abstand zwischen $f(x)$ und dem Grenzwert g kleiner als ε.

Klassische Formulierung: Die Funktion $f(x)$ nähert sich für $x \to \infty$ oder $x \to -\infty$ dem Grenzwert g immer weiter an, ohne ihn jemals zu erreichen.

$$Grenzwert\ g = \lim_{x \to +\infty} f(x)$$

bzw.

$$Grenzwert\ g = \lim_{x \to -\infty} f(x)$$

Asymptote

Gerade mit der Gleichung

$y = g$

Linie, der sich der Funktionsverlauf immer weiter annähert.

Urbildfolge und Bildfolge

Für die Variable x wird nacheinander 1, 2, 3, 4, ... , n eingesetzt. Die so entstehende Folge n bezeichnet man als Urbildfolge. Für Urbildfolgen lassen sich auch Funktionen von n einsetzen, um sich zum Beispiel dem Grenzwert schneller anzunähern – dargestellt mit dem Formelzeichen x_n). Dadurch ergibt sich eine Folge von Funktionswerten $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, ... , $f(n)$ – die sogenannte Bildfolge.

Grenzwert an einer Stelle

Eine Zahl g heißt Grenzwert der Funktion $f(x)$ für $x \to x_0$, wenn für jede Urbildfolge die Bildfolge den selben Grenzwert g hat . Dabei ist es egal, wie man sich x_0 nähert – das legt nämlich die Urbildfolge fest. Es ergibt sich immer der gleiche Grenzwert. Schreibweise:

$$Grenzwert\ g = \lim_{x \to x_0} f(x)$$

linksseitiger Grenzwert	Annäherung an den Grenzwert bei x_0 von $x < x_0$ (in der grafischen Darstellung von $f(x)$ nähert man sich von links an x_0)
rechtsseitiger Grenzwert	Annäherung an den Grenzwert bei x_0 von $x > x_0$ (in der grafischen Darstellung von $f(x)$ nähert man sich von rechts an x_0)

Grenzwertsätze

Rechenregeln für die Berechnung von Grenzwerten einer Summe, einer Differenz, eines Produkts und eines Quotienten (vgl. Formelsammlung).

Konvergente Funktion

Funktion, die einen Grenzwert besitzt. „Die Funktion konvergiert gegen den Grenzwert ....“.

Divergente Funktion

Funktion, die keinen Grenzwert besitzt.

Bestimmte Divergenz

Funktion, die für $x \to \infty$ beliebig groß wird, d. h. $f(x) \to \infty$ und für $x \to -\infty$ beliebig klein wird, d. h. $f(x) \to -\infty$.